Ny Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices.

Af

F. Buchwaldt,

Capitain af Generalstaben.

Avec un Résumé français.

I. Methodens Grundprinciper.

Forord.

Liouville har i «Journal de l'école polytechnique, Cahier XXI, Pag. 1—186» i 3 paa hverandre følgende Afhandlinger fremstillet sin Methode for Differentiation med hvilkesomhelt Indices. Methoden er baseret paa Formlen

$$\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = a^m e^{ax},$$

idet $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ betyder en Liouvillesk Differentiation, udført med Hensyn til x og med den vilkaarlige (positive, eller negative, hele, eller brudne) Index m. Der kan vel heraf udledes en almindelig Formel for $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$, som bliver udtrykt ved et bestemt Integral; men Formlen gjælder kun, naar $f(x)$ kan udvikles efter Potenser af e^x med negative Potensexponenter, (altsaa $f(\infty) = 0$). En Beregning af $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ igjennem en Rækkeudvikling af $f(x)$ efter Potenser af e^x vil i Almindelighed være meget vanskelig. Derimod kan man, idet Liouville har fremstillet en simpel Formel for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$, gjældende for $m > n < 0$, og i Slutningen (Pag. 159—162) af sin 2den Afhandling paavist, hvorledes Formlen ved Hjælp af den «Complementære Function» kan bringes til Anvendelse for hvilkesomhelst Værdier af m og n, udvikle $f(x)$ i Række efter Potenser af x og differentiere denne Række. Der er desuagtet flere Omstændigheder, som gjøre, at Liouvilles Methode forekommer mig at være meget compliceret og at maatte i Anvendelserne medføre megen Usikkerhed. Den største Vanskelighed er vistnok den, at $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ ikke altid har een bestemt og endelig Værdi, men kan, bortset fra den Complementære Function, have flere, ja endogsaa uendelig mange Værdier, saa at det i ethvert foreliggende Tilfælde gjælder om at finde den rette, ɔ: den, der vedkommer Problemet. Dette følger allerede af Grundformlen, idet f. Ex. $\frac{\partial^{\frac{1}{6}} e^{ax}}{\partial x^{\frac{1}{6}}}$ har 6 Værdier. $\frac{\partial^m \cos ax}{\partial x^m}$ bliver (Pag. 119—124 osv.) ifølge Grundformelen $= a^m \cos\left(ax + \frac{m\pi}{2}\right)$, som for $m = \frac{1}{6}$ har 6 Værdier. Da imidlertid $\cos ax$ er $= \cos(-ax)$, bliver $\frac{\partial^m \cos ax}{\partial x^m}$ ogsaa $= (-1)^m a^m \cos\left(\frac{m\pi}{2} - ax\right)$, hvorved der for $m = \frac{1}{6}$ faaes i det Hele 12 Værdier; men dermed er man endda ikke færdig; thi man kan f. Ex. have $\cos ax = p \cos ax - (p - 1) \cos ax$, hvorved $\frac{\partial^m \cos ax}{\partial x^m}$ kan faae uendelig mange Værdier. Noget Lignende gjælder om $\frac{\partial^m \sin ax}{\partial x^m}$ og i mangfoldige andre Tilfælde, og Liouville bemærker (Pag. 124) selv herom: «Cette ambiguité des valeurs des differentielles du sinus et du cosinus est en effect souvent embarrassante.»

En Ulempe af lignende Art forekommer mig at være den, at man for den endelige Række

$$\psi = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

vel kan have $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m} = 0$, men at $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}$ ogsaa kan have andre Værdier. En Function $\Sigma A_\varepsilon \varepsilon^{-m} e^{\varepsilon x}$, hvori Potensexponenterne ε til e^x ere uendelig smaa (og Coefficienterne $A_\varepsilon \varepsilon^{-m}$ i Reglen uendelige) vil nemlig (Pag. 103—105) ved Rækkeudviklig kunne give en endelig Function ψ, idet $C_0 = \Sigma A_\varepsilon \varepsilon^{-m}$, $C_1 = \Sigma A_\varepsilon \frac{\varepsilon^{-m+1}}{1}, \ldots$, og ved Differentiation med Index m efter Grundformlen faaes altsaa $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m} = \Sigma A_\varepsilon e^{\varepsilon x}$, som vil kunne blive $= 0$, naar Coefficienterne A_ε opfylde Betingelserne $\Sigma A_\varepsilon = 0$, $\Sigma A_\varepsilon \varepsilon = 0$, $\Sigma A_\varepsilon . \varepsilon^2 = 0, \ldots$; men, naar disse Betingelser ikke ere opfyldte, vil $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}$ ikke være $= 0$. Da imidlertid $\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}$ paa uendelig mange Maader kan blive $= 0$, saa er en Function af Formen ψ med arbitrære Coefficienter «Complementær Function til $\frac{\partial^{-m} f(x)}{\partial x^{-m}}$, eller, idet m er vilkaarlig og ikke indgaaer i ψ, til $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$. Jeg kan dog ikke se rettere, end at der hviler en Usikkerhed over denne Bestemmelse af den Complementære Functions Begreb, som maa kunne foraarsage Vanskelighed i Anvendelserne.

Ved at benytte den Complementære Function ψ med uendelige Værdier for Coefficienterne $C_0, C_1, C_2, \ldots$, er det at Liouville, som foran bemærket, bliver i Stand til at finde $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ for hvilkesomhelst Værdier af m og n. Den herved anvendte Fremgangsmaade kan — som jeg af Hr. Docent Lorenz er bleven gjort opmærksom paa — kort angives ved Formlen

$$\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = (-1)^m \frac{\gamma(m-n)}{\gamma(-n)} x^{n-m}$$

hvori γ er den Funhtion, som jeg har indført i denne Afhandling og defineret ved Formlerne (3), (4) og (4)' i Forbindelse med (2), og som, naar a' betyder et positivt helt Tal, eller 0, giver $\gamma(-a') = \pm \infty$. Naar den nævnte Formel anvendes, bliver —

forudsat at $(m - a')$ ikke er $= 0$, eller negativ hel — $\frac{\partial^m x^{a'}}{\partial x^m}$ altid eller ikkun $= 0$; men denne Værdi følger, som foran bemærket, ikke ubetinget af Grundformlen, men kommer kun frem, naar man lader Coefficienterne i Rækkeudviklingen for $x^{a'}$ efter Potenser af e^x opfylde visse Betingelser. Vilde man f. Ex. sætte $x^{a'} = \left(\frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2\varepsilon}\right)^{a'}$, saa vilde man ikkun faae $\frac{\partial^m x^{a'}}{\partial x^m} = 0$, naar $m > a'$, men $= \infty$, naar $m < a'$. Omvendt vil, naar n ikke er positiv hel, Formlen for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ aldrig give $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = 0$; men ved $x^n = \left(\frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2\varepsilon}\right)^n$ giver Grundformlen $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = 0$, naar $m > n$, og $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m} = \infty$, naar $m < n$. Det synes mig derfor, om end Uoverensstemmelserne kunne hæves ved en uendelig Complementær Function, misligt i den samme Opgave at anvende Formlen for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ sammen med Grundformlen.

Vil man, som Prof. Kelland har gjort i en Afhandling i «Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1847», paa hvilken min Opmærksomhed først for nyligen er bleven henledet, lægge den anførte Formel for $\frac{\partial^m x^n}{\partial x^m}$ til Grund for Methoden, saa synes det mig, at man samtidigen bør forlade Liouvilles Grundformel; thi den nye Grundformel, som iøvrigt ogsaa har den Ulempe at medføre flere Værdier for $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$, giver da, naar $(m - a')$ ikke er 0, eller negativ hel, ubetinget og ikkun $\frac{\partial^m x^{a'}}{\partial x^m} = 0$, saa at den Complementære Function bliver $\sum_{a'=0}^{a'=\infty} C_{a'} x^{a'}$, som ikke længere med Nødvendighed indeholder et endeligt og ubestemt Antal Led. Enhver Funktion, der kan udvikles efter Potenser af x med positive hele Exponenter (ɔ: de almindeligste og simpleste Functioner), vil altsaa være en speciel Form af den Complementære Function. Da nu Formlerne for $\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}$ ikke i Almindelighed bør indeholde Led af af denne arbitrære Function, og da e^{ax} er en speciel Form af denne, forekommer det mig besynderligt at sætte $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = a^m e^{ax}$; thi $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m}$ bør, synes det mig, ligesaa vel som $\frac{\partial^m \sum\limits_{a'=0}^{a'=\infty} C_{a'} x^{a'}}{\partial x^m}$, sættes $= 0$. Prof. Kelland har rigtignok (Pag. 242—243) ført et Bevis for, at $\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m}$ bliver $= a^m e^{ax}$, og jeg maa tilstaae, at jeg, da jeg ikke forstaaer hans symbolske Betegnelser, ikke tør drage Rigtigheden af dette Bevis i Tvivl; men jeg antager, at han kommer til det nævnte Resultat netop ved Indførelsen af den specielle Complementære Function $a^m e^{ax}$; thi han finder først, ved at differentiere Rækken for e^{ax} efter den antagne nye Grundformel,

$$\frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m} = (-a)^m \frac{\gamma(m)}{\gamma(o)} \left((ax)^{-m} + \frac{(ax)^{1-m}}{1-m} + \frac{(ax)^{2-m}}{(1-m)(2-m)} + \dots \right),$$

som forekommer mig at maatte være $= 0$ i alle Tilfælde, undtagen naar m er hel; thi $\gamma(o)$ er $= \pm \infty$, og Rækken indenfor Parenthesen er convergent for enhver Værdi af ax. —. Kellands øvrige Udvikling har jeg heller ikke kunnet følge; men hans Grundlag forekommer mig ikke heldigere end Liouvilles, og hans derpaa byggede Methode er vistnok hverken letfattelig eller simpel i sine Resultater og Anvendelser. Kellands Formel (Pag. 244) for $\frac{\partial^m lx}{\partial x^m}$ er saaledes en Grænseformel, som ikke frembyder nogen Lighed med de tilsvarende bekjendte Formler for m positiv, eller negativ hel, saa at disse Formler kun paa en møisommelig Maade kunne udledes af den almindelige Formel. Kelland synes heller ikke at have taget tilstrækkeligt Hensyn til den Complementære Function.

Den Methode til Differentiation med hvilkesomhelst Indices, som i denne Afhandling vil blive fremstillet, og som under en mindre fuldstændig Form tidligere har været offentliggjort i »Tidsskrift for Mathematik, 1875», synes mig at frembyde følgende Fordele:

$\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ faaer, ifølge Grundformlerne (5) og (5)', stedse kun een endelig Værdi. Denne Værdi bestemmes ved Formler, hvis Form er meget simpel, og som frembyde en iøinefaldende Lighed med de for positive og negative hele Differentiations-indices bekjendte Formler. «Complementet» er i ethvert givet Tilfælde let at bestemme, og Methoden, som er meget letfattelig og i det følgende Hovedafsnit II om Anvendelserne vil blive udførligere fremstillet, er i Stand til paa en særdeles simpel Maade at løse de samme og lignende Problemer som dem, der kunne løses ved Liouvilles Methode. — Jeg antager derfor, at min Methode i Reglen vil være at foretrække for Liouvilles, men betvivler dog ikke, at der undtagelsesvis kan existere Problemer, som løses lettere ved denne, navnligen naar en Rækkeudvikling efter Potenser af e^x skulde falde lettere end en Rækkeudvikling efter Potenser af x.

---

§ 1. For at undgaae Vidtløftighed, og for at Størrelsernes Art, uden nærmere Forklaring, kan fremgaae af Formlerne, ville vi i det Følgende stedse betegne et positivt helt Tal (eller 0) ved et lille latinsk Bogstav med et Mærke foroven (a', b', c', ...) og en positiv ægte Brøk ved et lille græsk Bogstav (α, β, γ, ...). Er saaledes $m = m' + \mu$, da er $m > 0$, m' positiv hel eller 0 og $0 \leqq \mu \leqq 1$; er $m = -(m' + \mu)$, da er $m < 0$.

I det Følgende vil der ligeledes blive anvendt Betegnelserne «a» og $\gamma(a)$, hvilke Functioner det vil være nødvendigt at definere, forinden vi gaae over til den egentlige Fremstilling af Methoden.

«a», defineret ved

$$«a» = a(a-1)(a-2)\ldots(-\infty), \tag{1}$$

er uendelig, eller ubestemt, men giver

$$\left.\begin{aligned} &\frac{«a»}{«a-k'»} = a(a-1)\ldots(a-(k'-1)) \\ \text{og} \\ &\frac{«a»}{«a+k'»} = \frac{1}{(a+k')(a+k'-1)\ldots(a+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$\dfrac{«a»}{«a \underline{+} k'»}$ er altsaa kun en ny, her hensigtsmæssigere, Betegnelse for den factorielle Function, af Graden $\mp k'$, tagen af a, hvilken ellers sædvanligen betegnes ved $\lfloor a |^{\mp k'}$.

I (1) og (2) kan a være saavel reel som imaginær $=(b+c\sqrt{-1})$, idet b og c ere reelle.

Ved Siden af Betegnelsen $\dfrac{«a»}{«a \underline{+} k'»}$ vil der blive brugt Betegnelsen

$$[a'] = 1 \cdot 2 \ldots a' = \frac{«a'»}{«0»}\,;\ [0] = 1.$$

Til Bestemmelse af Functionen $\gamma(a)$, hvis Indførelse i Formlerne vil være af stor Betydning for disses Simplification og Almengyldighed, haves for det Første:

$$\gamma(a) = (a-1)\,.\,\gamma(a-1)$$

eller, ifølge (2)

$$\frac{\gamma(a)}{\gamma(a \underline{+} k')} = \frac{«a-1»}{«a \underline{+} k' - 1»} \qquad (3)$$

hvori a er reel, eller imaginær.

Det sees af (3), at, naar $y \leqq z \leqq y+1$, og i hele dette valgte reelle Interval $\gamma(z)$ er bekjendt, saa kan vel $\gamma(a)$, ifølge (3), for enhver reel Værdi af a udtrykkes ved $\gamma(z)$, idet ikkun k' maa vælges saaledes, at $a \underline{+} k' = z$; men Formlen (3) er dog ikke tilstrækkelig til Bestemmelsen af $\gamma(a)$, idet $\gamma(z)$ er arbitrær. Gives derimod $\gamma(z)$ en bestemt Functionsform, der ikkun for Grændseværdierne y og $(y+1)$ maa tilfredsstille Betingelsen $\gamma(a) = (a-1)\,\gamma(a-1)$, saa vil $\gamma(a)$ for reelle Værdier af a være fuldstændigt bestemt; men ved et vilkaarligt Valg af Functionsformen for $\gamma(z)$ vil $\gamma(a)$ i Almindelighed blive discontinuert. Vi ville derfor antage, at $z = \zeta$, altsaa $0 \leqq \zeta \leqq 1$, og at $\gamma(\zeta) = \Gamma(\zeta)$, det 2det Eulerske Integral, og det er da klart, at, naar $a > 0$, ɔ: $a = a' + \alpha$, saa vil $\gamma(a' + \alpha)$, ifølge (3), blive paa samme Maade udtrykt ved $\gamma(\zeta) = \Gamma(\zeta)$, som $\Gamma(a' + \alpha)$ udtrykkes ved $\Gamma(\zeta)$; $\gamma(a' + \alpha)$ vil altsaa blive $= \Gamma(a' + \alpha)$, saa at γ Functionen, tagen af en positiv reel Størrelse, er sammenfaldende med ΓFunctionen, tagen af den samme Størrelse. $\gamma(a)$ vil da for reelle Værdier af a være fuldstændigt defineret ved (3) i Forbindelse med

$$\gamma(a' + \alpha) = \Gamma(a' + \alpha) = \int_0^\infty e^{-z} z^{a' + \alpha - 1} dz \tag{4}$$

Da $\gamma(1) = \Gamma(1) = 1$, vil man faae $\gamma(0)$, $\gamma(-1)$, $\gamma(-2)$, ... $\gamma(-a')$, ... $= \pm\infty$, hvorimod Forholdet $\dfrac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$, ifølge (3), vil være endeligt, idet

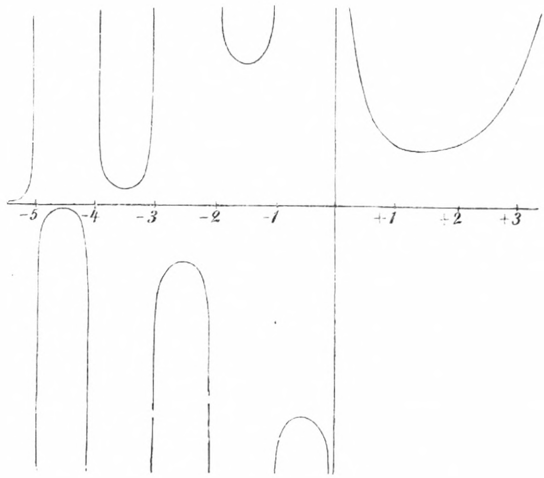
$$\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-a'-k')} = \frac{«-a'-1»}{«-a'-k'-1»} = (-a'-1)(-a'-2)\ldots$$

$$\ldots(-a'-k') = (\div 1)^{k'} \frac{[a'+k']}{[a']},$$

eller

$$\frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')} = \frac{(-1)^{b'} \, . \, [b']}{(-1)^{a'} \, . \, [a']} . \tag{a}$$

$\gamma(a' + \alpha)$ vil være > 0, hvorimod $\gamma(-a' - \alpha)$ vil være < 0, naar a' er et lige, og > 0, naar a' er et ulige Tal. Grafisk fremstillet i et retvinklet Coordinatsystem, med a som Abscisse og $\gamma(a)$ som Ordinat, vil $\gamma(a)$ give Figuren



Udtrykt ved bestemt Integral bliver

$$\gamma(-a'-a)=\int_0^\infty\left(e^{-z}-\sum_{r'=0}^{r'=a'}\frac{(-1)^{r'}}{[r']}z^{r'}\right)z^{-a'-a-1}\,dz$$

som let ved delvis Integration vil findes at tilfredsstille Betingelserne (3) og (4).

Hidtil er $\gamma(a)$ ikkun bleven bestemt for reelle Værdier af a. Naar a derimod er imaginær $=(b+c\sqrt{-1})$, idet b og c ere reelle, saa kan $\gamma(a)=\gamma(b+c\sqrt{-1})$ ved Hjælp af Betingelsen (3), eller $\gamma(a)=(a-1)\gamma(a-1)$, først udtrykkes ved $\gamma(b'+\beta+c\sqrt{-1})$, hvori altsaa den reelle Del af $a=b'+\beta+c\sqrt{-1}$ er >0, og dernæst er $\gamma(b'+\beta+c\sqrt{-1})$ bestemt ved

$$\gamma(b'+\beta+c\sqrt{-1})=\int_0^\infty e^{-z}z^{b'+\beta-1+c\sqrt{-1}}\,dz \qquad (4)'$$

som er en almindeligere Form for (4) og tilfredsstiller (3); thi ved delvis Integration erholdes af (4)'

$$\gamma(b'+\beta+c\sqrt{-1})=\left(\frac{e^{-z}z^{b'+\beta+c\sqrt{-1}}}{b'+\beta+c\sqrt{-1}}\right)_0^\infty+\frac{\gamma(b'+\beta+1+c\sqrt{-1})}{b'+\beta+c\sqrt{-1}};$$

men $e^{-z}z^{b'+\beta+c\sqrt{-1}}=e^{-z}z^{b'+\beta}\left(\cos v+\sqrt{-1}\,\sin v\right)$, hvori $v = lz^c$, forsvinder for $z = \infty$ og $z = 0$, saa at Formlen (4)' tilfredsstiller Betingelsen $\gamma(a) = (a-1).\gamma(a-1)$ og altsaa ogsaa (3).

En simplere Bestemmelse af $\gamma(b + c\sqrt{-1})$ faaes ved

$$\gamma(b + c\sqrt{-1})$$

$$= \gamma(b) - \gamma''(b)\frac{c^2}{1\,.\,2} + \ldots + \sqrt{-1}\left(\gamma'(b)\frac{c}{1} - \gamma'''(b)\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

naar Rækkerne blive convergente. Iøvrigt vil det i Anvendelserne vistnok kun sjeldent blive nødvendigt at beregne $\gamma(a)$ for imaginære Værdier af a.

§ 2. Med de valgte Betegnelser vil man nu for Differentiation med positive og negative hele Indices aabenbart have

$$\frac{d^{\pm m'}\,Cx^n}{dx^{\pm m'}} = \int^{(\mp m)} Cx^n\,dx^{\mp m'} = C\,\frac{\text{«}n\text{»}}{\text{«}n \mp m'\text{»}}\,x^{n \mp m'}$$

$$= C\,\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n\mp m')}\,x^{n \mp m'} \qquad (b)$$

som er gjældende for alle Værdier af n, undtagen for dem, der gjøre $(1+n)$ negativ hel (eller 0) uden samtidigen ogsaa at gjøre $(1+n+m')$ negativ hel (eller 0). Formlen (b) viser sig altsaa kun ubrugelig (giver $\pm\infty$) ved nederste Tegn for m' (Integration), naar $n = -(1+n')$ og $m' = 1 + n' + s'$, saa at den ikke kan bruges (uden Transformation) til Beregningen af

$$\int^{(1+n'+s')} Cx^{-(1+n')}\,dx^{1+n'+s'}$$

Formlen (b) er en speciel Form af den særdeles simple Formel

$$\frac{d^m\,Cx^n}{dx^m} = C\,\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)}\,x^{n-m}, \qquad (5)$$

og, da denne Formel — ved Siden af at indbefatte Differentiation med positive eller negative hele Indices som specielle Tilfælde — tillige opfylder den nødvendige Grundbetingelse, at Differentiationsordenen skal være ligegyldig, eller at det i Resultatet alene skal komme an paa Summen m af de efterhaanden anvendte Differentiationsindices, saa lægges den til Grund for Differentiation med hvilkesomhelst Indices m (reelle eller imaginære).

At Differentiationsordenen i (5) er ligegyldig, ses deraf, at den giver

$$\frac{d^p}{dx^p} \cdot \frac{d^{m-p}\, Cx^n}{dx^{m-p}} = C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m+p)} \frac{d^p\, x^{n-m+p}}{dx^p} =$$

$$C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m+p)} \frac{\gamma(1+n-m+p)}{\gamma(1+n-m)} x^{n-m} = \frac{d^m\, Cx^n}{dx^m}.$$

Da $\gamma(-a') = \pm\infty$, men $\dfrac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$ endelig, vil (5) blive ubrugelig, naar $n = -(1+n')$ og samtidigen $m \gtrless s' - n'$; men for disse Tilfælde vil man let af (5) kunne udlede en ligesaa simpel Formel (s. Formel (5)' i det Følgende), saa at man altsaa ved Hjælp af (5) og af den deraf afledede Formel (5)' vil kunne differentiere en hvilkensomhelst Function $f(x)$; thi man kan altid sætte

$$f(x) = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} A_{r'}\, x^{n_{r'}}, \qquad (c)$$

hvori $n_{r'}$ er et hvilketsomhelst Tal, naar der ingen Indskrænkning gjøres med Hensyn til Beskaffenheden af Coefficienterne $A_{r'}$, saa at man f. Ex. kan sætte $lx = lim \dfrac{x^{\varepsilon} - x^{-\varepsilon}}{2\varepsilon}$.

Formlen (5) med den deri indgaaende γ Function indeholder saaledes et fuldkomment tilstrækkeligt Grundlag for Problemets hele Løsning. Man vilde kunne komme til denne Formel og til de af den følgende Resultater ad en ganske anden, skjøndt langt besværligere Vej end den her fremstillede.

§ 3. Til $\dfrac{d^m f(x)}{dx^m}$, bestemt ved (5), eller deraf afledede Former, maa dog adderes en arbitrær Function $\psi(m, x)$, som vi ville kalde Complementet til $\dfrac{d^m f(x)}{dx^m}$, og som maa være af den Beskaffenhed, at den forsvinder ved en Differentiation med Index $-m$. Formen af det saaledes definerede Complement kan let angives, idet (5) giver

$$\frac{d^{-m}\, x^{-(m+1)-r'}}{dx^{-m}} = \frac{\gamma(-m-r')}{\gamma(-r')}\, x^{-(1+r')} = 0 \qquad (d)$$

undtagen naar $m = m'$, eller naar $-m = m' \leqq r'$, ɔ: $-(m+1) - r' = -(1+s')$, saa at man vil have

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int^{(m')} x^{-(m+1)-r'}\, dx^{m'} = \int^{(m')} x^{-(1+s')}\, dx^{m'} \gtrless 0 \\ \text{og} \\ \displaystyle\frac{d^{m'}\, x^{-(1+s')}}{dx^{m'}} \gtrless 0 \end{array}\right\}. \qquad (d)'$$

Betegnes nu ved $\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}$ «den fuldstændige Differentialkoefficient med Index m af $f(x)$ med Hensyn til x,» og ved $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ «den ufuldstændige Differentialkoefficient med Index m af $f(x)$ med Hensyn til x», haves

$$\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\} = \frac{d^m f(x)}{dx^m} + \psi(m, x) \qquad (A)$$

idet $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ faaes af Formlen (5), eller deraf afledede Formler, og $\psi(m, x)$ er «Complementet» til $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$.

Formen for Complementet $\psi(m, x)$ maa, ifølge (d), være

$$\psi(m, x) = x^{-m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'}\, x^{-r'} \qquad (B)$$

som giver $\frac{d^{-m}\psi(m, x)}{dx^{-m}} = 0$, eller

$$\frac{d^m \psi(-m, x)}{dx^m} = 0 \qquad (e)$$

naar Beregningen udføres efter (5), eller efter de andre af denne i det Følgende udledede Formler for Differentiation med Undtagelse af (6) og (7), som kunne give $\frac{d^m \varphi(-m, x)}{dx^m}$ = et Udtryk af Formen $\varphi(m, x)$ med bestemte Coefficienter, afhængige af Coefficienterne i $\varphi(-m, x)$ og af een arbitrær Constant.

De Led, der maatte findes i $f(x)$ af Formen $\varphi(-m, x)$, ville altsaa ved Differentiationen $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ i (A) enten blive $= 0$, eller i hvert Fald kunne inddrages i det arbitrære Complement $\varphi(m, x)$.

Ved fuldstændig Differentiation af (A) med Index $\div m$ skal man atter kunne faae

$$f(x) = \left\{\frac{d^{-m}}{dx^{-m}}\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}\right\} = \frac{d^{-m}}{dx^{-m}}\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\} + \varphi_1(-m, x), \text{ eller}$$

$$f(x) = \frac{d^{-m}}{dx^{-m}} \frac{d^m f(x)}{dx^m} + \varphi_1(-m, x) \qquad (f)$$

Herved er det først, ɔ: i (A), indførte arbitrære Complement $\varphi(m, x)$ igjen forsvundet, hvorimod der i Stedet er indkommet et Complement $\varphi_1(-m, x)$, som netop er = de Led i $f(x)$ af denne Form, som ved den første Differentiation med Index m enten forsvandt, eller gik over i $\varphi(m, x)$.

Det arbitrære Complement $\varphi(m, x)$ i (A) vil kunne futdstændigt bestemmes derved, at $\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde givne Betingelser (antage givne Værdier). I enkelte Anvendelser, som f. Ex. den i (f), kan et Complement og dermed dets Bestemmelse falde bort; men der vil da, ligesom i (f), indtræde andre Complementer, som, ihvorvel de have en anden Betydning, dog kunne bestemmes ved givne Betingelser af den anførte Beskaffenhed.

Det arbitrære Complement $\varphi(m, x)$ i (A) vil undertiden antage en meget simpel Form, f. Ex.

1) Naar $m = m'$, maa alle Coefficienterne C i $\varphi(m', x)$ være $= 0$, da $\varphi(m', x)$, ifølge den første $(d)'$, ikke maa indeholde Potenser af x med negative hele Potensexponenter. Complementet $\varphi(m'x)$ er altsaa $= 0$.

2) Naar $m = -m'$, kan ligeledes, ifølge den anden $(d)'$, $\psi(-m', x)$ ikke indeholde Potenser af x med negative hele Exponenter. Man faaer derfor i (B) $C_{m'} = C_{m'+1} = C_{m'+2} = \ldots = 0$, saa at Complementet til $\int^{(m')} f(x)\,dx^{m'}$ bliver

$$\psi(-m', x) = x^{m'-1}\left(C_0 + C_1 x^{-1} + \ldots + C_{m'-1} x^{-(m'-1)}\right).$$

3) Naar $m = m' + \mu$, og det er givet, at $\left\{\dfrac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}\right\}$ ikke kan være uendelig for $x = 0$, saa maa, naar $\dfrac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ ikke bliver uendelig for $x = 0$, $\psi(m' + \mu, x)$ være $= 0$. Indeholder derimod $\dfrac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ Led, der blive uendelige for $x = 0$, saa maa $\psi(m' + \mu, x)$ indeholde saadanne Led af (B), at $\psi(m' + \mu, 0)$ bringer hine Led i $\dfrac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ til at forsvinde for $x = 0$.

4) Naar $m = -(m' + \mu)$, og det er givet, at $\left\{\dfrac{d^{-(m'+\mu)} f(x)}{dx^{-(m'+\mu)}}\right\} = \left\{\int^{(m'+\mu)} f(x)\,dx^{m'+\mu}\right\}$ ikke kan være uendelig for $x = 0$, saa maa, naar $\int^{(m'+\mu)} f(x)\,dx^{m'+\mu}$ ikke bliver uendelig for $x = 0$, Complementet have Formen

$$\psi\left(-(m' + \mu), x\right) = x^{m'+\mu-1}\left(C_0 + C_1 x^{-1} + \ldots + C_{m'-1} x^{-(m'-1)}\right).$$

Indeholder derimod $\int^{(m'+\mu)} f(x)\,dx^{m'+\mu}$ Led, der blive uendelige for $x = 0$, saa maa der til det ovenstaaende Udtryk for $\psi(-(m'+\mu), x)$ føjes saadanne Led af (B), at $\psi(-(m'+\mu), 0)$ bringer hine Led i $\int^{(m'+\mu)} f(x)\,dx^{m'+\mu}$ til at forsvinde for $x = 0$.

§ 4. Naar i (5) $n = -(1 + n')$, faaes

$$\frac{d^m\, Cx^{-(1+n')}}{dx^m} = C\,\frac{\gamma(-n')}{\gamma(-n' - m)}\, x^{-(1+n')-m},$$

som kun kan give et brugeligt Resultat, naar $m = s' - n'$, hvorimod Formlen vil give $\pm\infty$, naar enten m er brudden, eller $m = -(1 + n' + s')$.

Efterat Formen af Complementet er bleven bestemt, ville vi dog nu kunne finde $\frac{d^m C x^{-(1+n')}}{dx^m}$ ved Hjælp af (5), naar vi sætte

$$x^{-(1+n')} = lim_\varepsilon \frac{1}{2}\left(x^{-(1+n')+\varepsilon} + x^{-(1+n')-\varepsilon}\right).$$

Man har da

$$\frac{d^m x^{-(1+n')+\varepsilon}}{dx^m} = \frac{\gamma(-n'+\varepsilon)}{\gamma(-n'-m+\varepsilon)} x^{-(1+n')-m+\varepsilon} =$$

$$\frac{«\varepsilon - (n'+1)»}{\varepsilon «\varepsilon - 1»} \frac{\gamma(1+\varepsilon)}{\gamma(-n'-m+\varepsilon)} x^{-(1+n')-m+\varepsilon},$$

og sættes heri, for Kortheds Skyld,

$$F(\varepsilon) = \frac{«\varepsilon - (n'+1)»}{«\varepsilon - 1»} \frac{\gamma(1+\varepsilon)}{\gamma(-n'-m+\varepsilon)},$$

$$F(0) = \frac{«-(n'+1)»}{«-1»} \frac{1}{\gamma(-n'-m)} = \frac{\gamma(-n')}{\gamma(0)} \frac{1}{\gamma(-n'-m)} =$$

$$\frac{(-1)^{n'}}{[n'] \,.\, \gamma(-n'-m)} \tag{g}$$

saa haves

$$\frac{d^m x^{-(1+n')+\varepsilon}}{dx^m} = \frac{x^{-(1+n')-m}}{\varepsilon} \,.\, F(\varepsilon)\, x^\varepsilon =$$

$$\frac{x^{-(1+n')-m}}{\varepsilon} (F(0) + \varepsilon F'(0) + \ldots)(1 + \varepsilon l x + \ldots) =$$

$$\frac{1}{\varepsilon} F(0) \,.\, x^{-(1+n')-m} + F(0) \,.\, x^{-(1+n')-m} l x + F'(0) \,.\, x^{-(1+n')-m} + \ldots$$

som altsaa vil give

$$lim_\varepsilon \frac{1}{2}\left(\frac{d^m x^{-(1+n')+\varepsilon}}{dx^m} + \frac{d^m x^{-(1+n')-\varepsilon}}{dx^m}\right) = \frac{d^m x_{-(1+n')}}{dx^m} =$$

$$= F(0) \,.\, x^{-(1+n')-m} l x + F'(0) \,.\, x^{-(1+m)-n'},$$

men Complementet vil, ifølge (B), indeholde et Led $C_{n'} \,.\, x^{-(1+m)-n'}$, eller, naar $m = -(1 + n' + s')$, et Led $C_{n'} \,.\, x^{s'}$, saa at Ledet

$F'(0) \,.\, x^{-(1+m)-n'}$ kan antages indbefattet i Complementet. Man faaer derfor $\frac{d^m\, x^{-(1+n')}}{dx^m} = F'(0) \,.\, x^{-(1+n')-m}\, lx$, eller, ifølge (g),

$$\frac{d^m\, Cx^{-(1+n')}}{dx^m} = \frac{(-1)^{n'}\, C}{[n'] \,.\, \gamma(-n'-m)}\, x^{-(1+n')-m}\, lx \qquad (5)'$$

hvori $m \gtrless s' - n'$.

Da $(5)'$, ifølge (g) ogsaa kan skrives

$$\frac{d^m\, Cx^{-(1+n')}}{dx^m} = C\frac{\gamma(-n')}{\gamma(-n'-m)}\, x^{-(1+n')-m}\, \frac{lx}{\gamma(0)},$$

saa ses $(5)'$ at fremstaae af (5), naar man multiplicerer det i (5) givne Udtryk for $\frac{d^m\, Cx^{-(1+n')}}{dx^m}$ med Faktoren $\frac{lx}{\gamma(0)}$.

Vi have saaledes i $(5)'$ faaet et Supplement til (5), hvorved **enhver** Potens af x kan differentieres efter en meget simpel Formel.

Formlen $(5)'$ verificeres let for Tilfældet $m = -(1 + n' + s')$, som giver

$$\int^{(1+n'+s')} Cx^{-(1+n')}\, dx^{1+n'+s'} = C\frac{(-1)^{n'}}{[n'] \,.\, \gamma(1+s')}\, x^{s'}\, lx = C\frac{(-1)^{n'}}{[n']\,[s']}\, x^{s'}\, lx,$$

og som, ved at differentieres $(1 + n' + s')$ Gange, giver

$$\frac{d^{(s'+1+n')}\, Cx^{s'}\, lx}{dx^{s'+1+n'}} = (-1)^{n'}\, [n']\, [s']\, Cx^{-(1+n')}$$

ligesom ogsaa $(5)'$, ifølge (f), ved at differentieres med Index $-m$, skal give uden Complement

$$\frac{d^{-m}\, Cx^{-m-(1+n')}\, lx}{dx^{-m}} = (-1)^{n'}\, [n'] \,.\, \gamma(-n'-m)\, Cx^{-(1+n')}$$

eller, ved i Stedet for m at sætte $-(p + 1 + n')$,

$$\frac{d^{p+1+n'}\, Cx^p\, lx}{dx^{p+1+n'}} = (-1)^{n'}\, [n'] \,.\, \gamma(1+p)\, Cx^{-(1+n')}, \qquad (h)$$

dog maa det erindres, at p ikke kan være negativ hel, idet vi ere gaaede ud fra, at $m = -(p + 1 + n')$ ikke er $= s' - n'$.

Det vil af § 3 og især af den følgende § 9 være indlysende, at $\frac{d^m x^p lx}{dx^m}$ ikke kan findes med Complement $\psi(m, x)$ ved en Differentiation af (h) efter Formlen (5); thi sættes i (h) $n' = 0$, og differentieres derpaa med Index $m - (p + 1)$, faaes

$$\frac{d^m Cx^p lx}{dx^m} = C \frac{\gamma(1+p)}{\gamma(1+p-m)} x^{p-m} lx, \tag{i}$$

som vel er rigtig, men som fordrer et Complement:

$$\psi(m - p - 1, x) \text{ og ikke } \psi(m, x).$$

$\frac{d^m x^p lx}{dx^m}$ maa derfor, naar $\frac{d^m x^p lx}{dx^m}$ skal have det til Differentiationsindex m svarende Complement $\psi(m, x)$, findes ved (5), eller deraf afledede Former, saaledes som det i den følgende § 8 vil blive vist.

§ 5. Det kan nu bevises, at

$$\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_0^{x-a} t^{m'+\mu-1} f(x-t)\, dt, \tag{6}$$

idet a er en vilkaarlig Constant, som i numerisk Henseende er $< x$. a kan altsaa ikke være $= \pm\infty$.

Formlen (6) giver for $\mu = 0$ en bekjendt Formel (Ramus, Side 76, Formel (95)'), hvorved et Integral af Ordenen m' reduceres til et Integral af 1ste Orden.

Naar Rigtigheden af (6) forudsættes bevist, haves

$$\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_b^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^b (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt, \tag{k}$$

hvori det sidste Integral ses, ifølge (B), at indeholde Led af Complementet $\psi(-(m'+\mu), x)$. Formlen (6) er i denne Henseende væsentligt forskjellig fra (5) eller (5)', der ikke indeholde Led af Complementet. Det er ikkun, naar $f(x)$ er en saadan Function, at der gives en Konstant a, som gjør alle Integralerne $\int f(x)\, x^{r'}\, dx = 0$ for $x = a$, at (6) ikke vil indeholde noget Led af Complementet. Det sees let, at, naar i Rækkeudviklingen for $f(x)$ efter Potenser af x Potensexponenterne ere > -1, altsaa $lim\ \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, vil $a = 0$ i (6) gjøre, at Formlen ikke kommer til at indeholde Led af Complementet, saa at, naar Rækken for $f(x)$ giver $lim_\varepsilon\ \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, vil

$$\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_0^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt \qquad (6)'$$

ikke indeholde Led af Complementet.

Medens det altsaa ikkun er tilladt at sætte Udtrykkene for $\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu}$ ifølge (6) og (5), eller (5)' ligestore, naar Complementet tilføies, saa kan man derimod, naar Rækken for $f(x)$ giver $lim\ \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, uden Tilføielse af Complement sætte $\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu}$, beregnet efter (6)', ligt med $\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu}$, beregnet ved (c) og (5).

Vi ville nu først bevise, at (6) gjælder, naar $lim\ \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, derved at Potensexponenterne i Rækken (c) for $f(x)$ ere > -1. Det vil da for Bevisets Skyld være tilstrækkeligt i (6) at sætte $f(x) = x^{a'+\alpha-1}$, som giver

$$\int^{(m'+\mu)} x^{a'+\alpha-1}\, dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_0^x (x-t)^{m'+\mu-1} t^{a'+\alpha-1}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\gamma(m'+\mu)} \int_a^0 (x-t)^{m'+\mu-1} t^{a'+\alpha-1}\, dt,$$

hvori det første Integral ikke indeholder noget Led af Complementet, saa at man, ifølge (5), skal have

$$\int_0^x (x-t)^{m'+\mu-1}\, t^{a'+\alpha-1}\, dt = \gamma(m'+\mu)\,\frac{\gamma(a'+\alpha)}{\gamma(a'+\alpha+m'+\mu)}\, x^{a'+\alpha-1+m'+\mu}.$$

Sættes heri $t = xz$, $dt = xdz$, vil Betingelsen blive

$$\int_0^1 (1-z)^{m'+\mu-1}\, z^{a'+\alpha-1}\, dz = \frac{\gamma(m'+\mu)\,.\,\gamma(a'+\alpha)}{\gamma(m'+\mu+a'+\alpha)}; \qquad (l)$$

men Integralet heri er Binets B-Function, for hvilken der haves den bekjendte Relation (Steens Diff. og Integralregning S. 164)

$$B(m'+\mu, a'+\alpha) = \int_0^1 (1-z)^{m'+\mu-1} z^{a'+\alpha-1} dz = \frac{\Gamma(m'+\mu)\,.\,\Gamma(a'+\alpha)}{\Gamma(m'+\mu+a'+\alpha)}$$

som netop er Betingelsen (l).

Det kan derefter bevises, at, naar (6) gjælder for $f(x)$, saa gjælder den ogsaa for $f'(x)$, altsaa for $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., saa at (6) vil gjælde for en hvilkensomhelst Function, idet dennes Rækkeudvikling efter Potenser af x da vil kunne indeholde Exponenter, der ere $> -r'$, eller $> -\infty$. Man faaer nemlig ved Differentiation af det sidste Udtryk i (6)

$$\frac{d\,.\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu}}{dx} = \frac{f(a)}{\gamma(m'+\mu)}(x-a)^{m'+\mu-1} + \frac{1}{\gamma(m'+\mu)}\int_0^{x-a} t^{m'+\mu-1} f'(x-t)\, dt,$$

som, hvis (6) ogsaa skal gjælde for $f'(x)$, maa, ifølge det sidste Udtryk i (6), fordre som Betingelse

$$\frac{d\,.\int^{(m'+\mu)} f(x)\, dx^{m'+\mu}}{dx} = \frac{f(a)}{\gamma(m'+\mu)}(x-a)^{m'+\mu-1} + \int^{(m'+\mu)} f'(x)\, dx^{m'+\mu},$$

der aabenbart er tilfredsstillet, idet $\dfrac{f(a)}{\gamma(m'+\mu)}(x-a)^{m'+\mu-1}$, ifølge (B), kan indbefattes i Complementet til $\int^{(m'+\mu)} f'(x)\, dx^{m'+\mu}$.

Sættes $(1-\mu)$ for $(m'+\mu)$ i (6), og differentieres derpaa $(m'+1)$ Gange, faaes

$$\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} = \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'+1} \cdot \int_a^x (x-t)^{-\mu} f(t)\, dt}{dx^{m'+1}}, \tag{7}$$

og, naar Rækken for $f(x)$ giver $lim\, \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, vil

$$\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} = \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'+1} \cdot \int_0^x (x-t)^{-\mu} f(t)\, dt}{dx^{m'+1}} \tag{7'}$$

ikke indeholde Led af Complementet $\psi(m'+\mu, x)$.

(7) giver altsaa Differentiation og (6) Integration af en hvilkensomhelst Funktion $f(x)$.

Ved Hjælp af (6) og (7), eller (5) og deraf afledede Formler, kan $f(x)$ bestemmes, naar man har givet $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt = F(x)$, idet $F(x)$ er en bekjendt Function.

Anm. Den til (6) svarende Formel hos Liouville er

$$\frac{\delta^{-(m'+\mu)} f(x)}{\delta x^{-(m'+\mu)}} = \frac{1}{\Gamma(m'+\mu)} \int_\infty^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt,$$

der — som alt bemærket — ikkun gjælder, naar $f(x)$ kan udvikles efter Potenser af e^x med negative Exponenter ($f(\infty) = 0$). Denne Formel kan derfor, da de Functionsformer, for hvilke den gjælder, ere ganske specielle, kun have en temmelig begrænset Anvendelse. Saaledes synes f. Ex. ogsaa det bestemte Integral i denne Formel, dels paa Grund af de særegne Functionsformer, dels paa Grund af, at den lavere Grænse har den specielle Værdi ∞, at maatte være mindre anvendeligt end Integralet i (6) til Løsningen af Problemer, der fordre en Bestemmelse af $f(x)$.

§ 6. Naar m er positiv, eller negativ hel, haves som bekjendt

$$\frac{d^m \cdot f_1(x) \cdot f_2(x)}{dx^m} = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{\langle m \rangle}{\langle m - r' \rangle} \overset{(r')}{f_1}(x) \frac{d^{m-r'} f_2(x)}{dx^{m-r'}}, \tag{8}$$

og det kan bevises, at denne Formel gjælder for hvilkesomhelst Værdier af m. Da (8) beholder sin Form uforandret ved at differentieres p' Gange, idet da kun $(m+p')$ træder i Stedet for m, vil det være tilstrækkeligt at bevise, at den gjælder for $m<0$; thi den vil da ogsaa gjælde for $(m+p')$, der, naar $p'>-m$, vil være >0.

Sættes da i (8) $m=-(m'+\mu)$, faaes, ifølge (6),

$$\int^{(m'+\mu)} f_1(x)\,.\,f_2(x)\,dx^{m'+\mu} =$$

$$= \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']}\,\frac{«-(m'+\mu)»}{«-(m'+\mu)-r'»}\,\overset{(r')}{f_1}(x)\int^{(m'+r'+\mu)} f_2(x)\,dx^{m'+r'+\mu} =$$

$$\sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']}\,\frac{«-(m'+\mu)»}{«-(m'+\mu)-r'»}\,\overset{(r')}{f_1}(x)\,\frac{1}{\gamma(m'+\mu+r')}\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1+r'} f_2(t)\,dt$$

eller, ifølge (3),

$$\int^{(m'+\mu)} f_1(x)\,.\,f_2(x)\,dx^{m'+\mu} =$$

$$\frac{1}{\gamma(m'+\mu)}\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f_2(t) \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']}\,\frac{«-(m'+\mu)»}{«-(m'+\mu)-r'»}\,\frac{«m'+\mu-1»}{«m'+\mu-1+r'»}\,(x-t)^{r'}\overset{(r')}{f_1}(x)\,dt,$$

som, da $\dfrac{«-(m'+\mu)»}{«-(m'+\mu)-r'»}\,\dfrac{«m'+\mu-1»}{«m'+\mu-1+r'»} = (-1)^{r'}$, og da

$$f_1(t) = f_1(x-(x-t)) = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (-1)^{r'}\,\frac{(x-t)^{r'}}{[r']}\,\overset{(r')}{f_1}(x),$$

giver Betingelsen

$$\int^{(m'+\mu)} f_1(x)\,.\,f_2(x)\,dx^{m'+\mu} = \frac{1}{\gamma(m'+\mu)}\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f_1(t)\,.\,f_2(t)\,dt$$

der er opfyldt ifølge (6), saa at (8) *gjælder for hvilkesomhelst Værdier af* m *og for hvilkesomhelst Functioner, der gjøre Rækken convergent.* At dette ikke altid kan være Tilfældet, endskjøndt Rækken (8) i formel Henseende altid er rigtig, er indlysende. Sættes f. Ex. i (8) $m=-1$, faaes en Række, der vel er formelt rigtig og kan erholdes direkte ved delvis Integration af $\int f_1(x) f_2(x)\,dx$, men som dog ikke altid er convergent, idet f. Ex. $f_2(x) = 1$ og $f_1(x) = x^{-1-a'-a}$ vil gjøre Rækken divergent.

For at komme til et bestemtere Resultat i denne Henseende ville vi forestille os $f_1(x)$ og $f_2(x)$ udviklede efter Potenser af x og i de enkelte Led af (8) differentierede efter (5). Man kan da undersøge, hvorvidt Coefficienterne til de forskjellige Potenser af x i $\frac{d^m f_1(x) f_2(x)}{dx^m}$ lade sig bestemme. For i Almindelighed at undersøge dette vil det være tilstrækkeligt i (8) at sætte $f_1(x) = x^p$ og $f_2(x) = x^n$, som giver $\overset{(r')}{\underset{1}{f}(x)} = \frac{«p»}{«p-r'»} x^{p-r'}$ og

$$\frac{d^{m-r'} f_2(x)}{dx^{m-r'}} = \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m+r')} x^{n-m+r'} =$$

$$= \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} \frac{«n-m»}{«n-m+r'»} x^{n-m+r'}$$

altsaa

$$\frac{d^m x^{p+n}}{dx^m} = x^{p+n-m} \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{«m»}{«m-r'»} \frac{«p»}{«p-r'«} \frac{«n-m»}{«n-m+r'»} =$$

$$= x^{p+n-m} \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} u_{r'}.$$

Heri lader nu $\sum_{r'=0}^{r'=\infty} u_{r'}$ sig beregne enten, naar Rækken bliver endelig (hvilket vil ske, naar enten $m = m'$, eller $p = p'$), eller naar Rækken er uendelig og convergent, ɔ: naar

$$Lim.\, r' \left(\frac{u_{r'}}{u_{r'+1}} - 1 \right) = Lim.\, r' \left(\frac{(r'+1)(n-m+r'+1)}{(m-r')(p-r')} - 1 \right) > 1,$$

altsaa naar $n + p > -1$.

I disse 3 Tilfælde maa man da, ifølge (5), have

$$\sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r']} \frac{«m»}{«m-r'»} \frac{«p»}{«p-r'»} \frac{«n-m»}{«n-m+r'»} = \frac{\gamma(1+n-m)}{\gamma(1+n)} \frac{\gamma(1+n+p)}{\gamma(1+n+p-m)}, \quad (n)$$

Af denne Undersøgelse følger da, at Rækken (8) i følgende 3 Tilfælde i Almindelighed vil blive convergent:

1) Naar $m = m'$.

2) Naar $f_1(x)$ kan udvikles efter Maclaurins Formel ($f_2(x)$ kan da være en hvilkensombelst Function).

3) Naar $lim\ \varepsilon f_1(\varepsilon).f_2(\varepsilon) = 0$.

Det 2det af disse Tilfælde er tilstede ved den bekjendte Anvendelse (Ramus, S. 232), der kan gjøres af (8) — hvilken Formel ogsaa følger af Liouvilles Methode — til at reducere en lineær Differentialligning, hvori Coefficienten til $\frac{d^{p'}y}{dx^{p'}}$ er en hel Function af x af Graden p', til en lineær Ligning af een Orden lavere, i hvilken Ligning dog Coefficienten til $\frac{d^{p'}u}{dx^{p'}}$ bliver af Graden $(p'+1)$.

§ 7. Formlen (8) kan benyttes til at udtrykke $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ ved $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., idet man i (8) kan sætte $f_2(x) = 1$. Formlerne (5) og (3) give nemlig

$$\frac{d^m C}{dx^m} = \frac{C}{\gamma(1-m)} x^{-m} \qquad (o)$$

$$\frac{d^{m-r'}C}{dx^{m-r'}} = \frac{C}{\gamma(1-m+r')} x^{-m+r'} = \frac{C}{\gamma(1-m)} \frac{«-m»}{«-m+r'»} x^{r'-m}.$$

Sættes altsaa i (8) $f_2(x) = 1$, og bemærkes, at, ifølge (2) og (3),

$$\frac{1}{\gamma(1-m)} \frac{«m»}{«m-r'»} \frac{«-m»}{«-m+r'»} = \frac{-m}{\gamma(1-m)} \cdot \frac{(-1)^{r'}}{r'-m} =$$
$$= \frac{1}{\gamma(-m)} \cdot \frac{(-1)^{r'}}{r'-m},$$

faaes

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \frac{1}{\gamma(-m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (-1)^{r'} \frac{x^{r'-m}}{(r'-m)\,[r']} \overset{(r')}{f}(x). \qquad (9)$$

I Stedet for $\frac{1}{r'-m}$ kan sættes $\frac{\gamma(r'-m)}{\gamma(1+r'-m)}$, og det ses, at, naar $m = m'$, vil Rækken (9) reduceres til det Led, for hvilket $r' = m'$, og som giver

$$\frac{d^{m'}f(x)}{dx^{m'}} = (-1)^{m'} \frac{\gamma(0)}{\gamma(-m')} \frac{1}{[m']} \overset{(m')}{f}(x)$$

eller, ifølge (α), $\dfrac{d^{m'} f(x)}{dx^{m'}} = \overset{(m')}{f}(x)$.

Iøvrigt vil Rækken (9), ifølge det i Slutningen af § 6 anførte, i Almindelighed blive convergent, naar $lim\, \varepsilon f(\varepsilon) = 0$.

Er saaledes $f(x) = x^{-1+a'+\alpha}$, faaes af (9) og (5)

$$\sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{(r'-m)\,.\,[r']} \; \frac{«a'+\alpha-1»}{«a'+\alpha-1-r'»} = \frac{\gamma(a'+\alpha)\,.\,\gamma(-m)}{\gamma(a'+\alpha-m)}. \qquad (p)$$

Ligesom (p) er en speciel Form af (n), saaledes er igjen (l) en speciel Form af (p), idet jo højre Side af (9) er = højre Side af (6), naar $m = -(m' + \mu)$.

§ 8. Blandt de forskjellige Udtryk, der, ifølge det Foregaaende, kunne erholdes for $\dfrac{d^m f(x)}{dx^m}$ ved Hjælp af Formlerne (5), (5)', (6), (6)', (7), (7)', (8) og (9), ville — med tilbørligt Hensyn til de tidligere anførte Betingelser — de, der kunne bestemmes ved Hjælp af (5), (5)', (6)', (7)' og (9) saavelsom af (8), naar i denne $\dfrac{d^{m-r'} f_2(x)}{dx^{m-r'}}$ paa samme Maade beregnes ved en af de sidstnævnte Formler, ikke indeholde Led af Complementet, og de kunne derfor sættes indbyrdes lige store. Ved en saadan Combination af forskjellige Udtryk for $\dfrac{d^m f(x)}{dx^m}$ vil man i mange Tilfælde kunne erholde interessante Resultater. Exempler paa saadanne Combinationer haves saaledes i Formlen (n) med dens specielle Former (p) og (l). Vi skulle indskrænke os til endnu i to simple Exempler at paavise denne Anvendelse af Methoden, idet vi i Ex. 1 ville kombinere 2 forskjellige Udtryk for $\dfrac{d^m e^{ax}}{dx^m}$ for derved blandt Andet at vise, at Methoden — hvad der jo forøvrigt er umiddelbart indlysende — maa føre til et andet Resultat end det, der danner Grundlaget for Liouvilles Methode, medens vi i Ex. 2 ville combinere forskjellige Udtryk for $\frac{d^m\, x^n\, lx}{dx^m}$ og derved tillige erholde nogle særdeles simple Relationer for Functionen $\gamma'(a)$, der jo vel er fuldstændig bestemt ved $\gamma(a)$, men hvis Hovedegenskaber det dog ved Anvendelserne af Methoden vil være nødvendigt at kjende.

Ex. 1. $f(x) = e^{ax}$ giver, indsat i (9),

$$\frac{d^m\, e^{ax}}{dx^m} = \frac{e^{ax}}{\gamma(-m)} \cdot \sum_{p'=0}^{p'=\infty} (-1)^{p'} \frac{a^{p'}\, x^{p'-m}}{(p'-m)\,.\,[p']}\,. \qquad (q)$$

(5) giver for $e^{ax} = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{a^{r'}\, x^{r'}}{[r']}$

$$\frac{d^m\, e^{ax}}{dx^m} = \frac{1}{\gamma(-m)} \cdot \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{«-1-m»}{«r'-m»}\, a^{r'} x^{r'-m}\,. \qquad (q)'$$

Disse to Udtryk ere lige store, og Coefficienten til $x^{r'-m}$ i begge Udtryk giver derfor Relationen

$$\sum_{p'=0}^{p'=r'} \frac{(-1)^{p'}}{(p'-m)\,.\,[p']\,.\,[r'-p']} = \frac{«-1-m»}{«r'-m»} = \frac{1}{(r'-m)\,(r'-1-m)\ldots(1-m)(-m)}, \qquad (r)$$

som let verificeres.

Ex. 2. Sætter man $lx = lim_{\varepsilon} \frac{x^{\varepsilon} - x^{-\varepsilon}}{2\varepsilon}$, $x^n lx = lim \frac{x^{n+\varepsilon} - x^{n-\varepsilon}}{2\varepsilon}$ saa giver (5), ved en Fremgangsmaade, analog med den, ved hvilken (5)' udledes af (5),

$$\frac{d^m\, x^n\, lx}{dx^m} = \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)}\, x^{n-m} \left(lx + \frac{\gamma'(1+n)}{\gamma(1+n)} - \frac{\gamma'(1+n-m)}{\gamma(1+n-m)} \right) \qquad (10)$$

som har megen Lighed med (5) og (5)' og giver $\frac{d^m\, x^n\, lx}{dx^m}$ under endelig Form, men udtrykt ved γ'-Functionen. (10) viser, at Udtrykket for $\frac{d^m\, x^n\, lx}{dx^m}$ i (i) maa — aaledes som det der er bemærket — completeres ved et andet Complement end det, der tilsyneladende fordredes af Differentiationsindexen.

Sættes i (8) $f_1(x) = lx$ og $f_2(x) = x^n$, faaes

$$\frac{d^m\, x^n\, lx}{dx^m} = \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n-m)}\, x^{n-m} \left(lx - \sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'}\, \frac{«m»}{«m-r'»}\, \frac{«n-m»}{«n-m+r'»} \right), (10)'$$

som er convergent, naar $m = m'$, eller naar $n > -1$. Under een af disse Forudsætninger ere Udtrykkene (10) og (10)' lige store. $m = 1$ skal derfor give

$$\frac{dx^n\, lx}{dx} = nx^{n-1}\left(lx + \frac{\gamma'(1+n)}{\gamma(1+n)} - \frac{\gamma'(n)}{\gamma(n)}\right) = nx^{n-1}\left(lx + \frac{1}{n}\right)$$

eller

$$\frac{\gamma'(1+a)}{\gamma(1+a)} - \frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} = \frac{1}{a}, \tag{s}$$

hvis Rigtighed vil fremgaae af (3), naar man deri sætter $k' = 1$ og differentierer med Hensyn til a.

Af (s) eller (3) faaes

$$\left.\begin{aligned} \frac{\gamma'(a+k')}{\gamma(a+k')} &= \frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} + \sum_{r'=0}^{r'=k'-1} \frac{1}{a+r'} \\ \frac{\gamma'(a-k')}{\gamma(a-k')} &= \frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} - \sum_{r'=1}^{r'=k'} \frac{1}{a-r'}, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

hvori man ved Hjælp af (3) kunde bortskaffe $\gamma(a+k')$ og $\gamma(a-k')$.

Ved (3)' kan nu igjen (10) verificeres for Tilfældene $m = \pm m'$, idet man faaer

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^{m'} x^n\, lx}{dx^{m'}} &= \frac{«n»}{«n-m'»}\, x^{n-m'}\left(lx + \sum_{r'=0}^{r'=m'-1} \frac{1}{n-r'}\right) \\ \int^{(m')} x^n\, lx\,.\, dx^{m'} &= \frac{«n»}{«n+m'»}\, x^{n+m'}\left(lx - \sum_{r'=1}^{r'=m'} \frac{1}{n+r'}\right), \end{aligned}\right\} \tag{t}$$

om hvilke Formlers Rigtighed man let vil kunne overbevise sig.

Sættes i (10) og (10)' $n = 0$ og $m = 1 - a$, faaes

$$\frac{\gamma'(a)}{\gamma(a)} = \gamma'(1) - (1-a)\sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{1}{r'(r'-1+a)}. \tag{u}$$

Ligesom (a) giver et Udtryk for $\dfrac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')}$, saaledes vil man ogsaa for $\dfrac{\gamma'(-a')}{\gamma'(-b')}$ kunne finde ganske det samme Udtryk. Man har nemlig af (10)', eller af (t)

$$\frac{d^{1+a'}\, lx}{dx^{1+a'}} = (-1)^{a'}\, [a']x^{-1-a'}$$

og sættes derfor i (10) $n = 0$ og $m = 1 + a'$, faaes Formlen

$$\frac{\gamma'(-a')}{(\gamma(-a'))^2} = (-1)^{1+a'}[a'] \tag{11}$$

som i Forbindelse med (a) giver den simple Relation

$$\frac{\gamma'(-a')}{\gamma'(-b')} = \frac{\gamma(-a')}{\gamma(-b')} = \frac{(-1)^{b'}[b']}{(-1)^{a'}[a']} = \frac{(-1)^{b'}\gamma(1+b')}{(-1)^{a'}\gamma(1+a')} \tag{12}$$

I Analogie med de af Formlerne (8) og (9) udledede Formler (n) og (p) for visse Rækkers Summation faaes af (10) og (10)' Formlen

$$\sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'} \frac{«m»}{«m-r'»} \frac{«n-m»}{«n-m+r'»} = \frac{\gamma'(1+n-m)}{\gamma(1+n-m)} - \frac{\gamma'(1+n)}{\gamma(1+n)}, \tag{v}$$

som er gjældende, naar enten $m = m'$, eller naar $n > -1$.

Som Exempler paa de mere specielle Resultater, der kunne udledes heraf, mærkes

$$m' \sum_{r'=1}^{r'=\infty} \frac{1}{r'(m'+r')} = [m'] \sum_{r'=1}^{r'=m'} \frac{(-1)^{r'+1}}{r'[r'][m'-r']} = \sum_{r'=1}^{r'=m'} \frac{1}{r'}$$

$$= \frac{\gamma'(1+m')}{\gamma(1+m')} - \gamma'(1) \tag{v)'$$

som erholdes ved i (v) at sætte først $n = m = m'$ og derpaa $n = 0$ og $m = -m'$ samt ved endeligen i den 1ste (3)' at sætte $a = 1$ og $k' = m'$.

§ 9. Om Complementet. Ligesom man med den i § 3 brugte Betegnelse for en fuldstændig (ɔ: completeret) Differentiation skal kunne faae $\left\{\frac{d^{-m}}{dx^{-m}}\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}\right\} = f(x)$, saaledes maa man mere almindeligt kunne have

$$\left.\begin{array}{c}
\left\{\dfrac{d^{m_2}}{dx^{m_2}}\left\{\dfrac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}\right\}\right\} = \left\{\dfrac{d^{m_1+m_2}}{dx^{m_1+m_2}} f(x)\right\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left\{\dfrac{d^{m_{i'}}}{dx^{m_{i'}}}\cdots\left\{\dfrac{d^{m_2}}{dx^{m_2}}\left\{\dfrac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}\right\}\right\}\cdots\right\} = \left\{\dfrac{d^{m_1+m_2+\ldots m_{i'}}}{dx^{m_1+m_2+\ldots m_{i'}}} f(x)\right\}
\end{array}\right\} \tag{w}$$

Hvad enten de successive Differentiationer med Indices $m_1, m_2, \ldots m_{i'}$ ere udførte efter den ene, eller den anden af Formlerne (5) til (10), ville de til hver Differentiation hørende Complementer $\psi_1(m_1, x)$, $\psi_2(m_2, x), \ldots \psi_{i'}(m_{i'}, x)$ alle kunne tænkes bestemte derved, at $\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde givne Betingelser (antage givne Værdier). Med Hensyn til den Maade, hvorpaa Complementerne bestemmes, er der altsaa ingen Forskjel imellem dem; men deres Fremkomst skyldes desuagtet forskjelligartede Aarsager. Hvis Differentiationen med Index m_1 havde været foretagen efter (6), eller (7), kunde man tænke sig de herved muligen fremkomne Led af Formen $\psi(m_1, x)$ inddragne i det arbitrære Complement $\psi_1(m_1, x)$; ligeledes kunde alle Led af Formen $\psi(m_2, x)$, fremkomme ved Differentiationen med Index m_2, tænkes inddragne i Complementet $\psi_2(m_2, x)$, osv. Vi ville derfor for Simpelheds Skyld foreløbig antage, at alle Differentiationerne i (w) ere foretagne, ikke efter (6), eller (7), men efter en af de andre Formler f. Ex. efter (5), idet denne Antagelse ikke i nogen væsentlig Grad vil influere paa det, som vi her ville undersøge, nemlig den forskjelligartede Nødvendighed af Forekomsten af Complementet $\psi_1(m_1, x)$ og af Complementerne $\psi_2(m_2, x), \ldots\ldots \psi_{i'}(m_{i'}, x)$, en Undersøgelse, der iøvrigt — som foran bemærket — for Anvendelserne er uden Betydning.

Det vil da af Indentiteterne (w) sees, at der i dem paa hver Side af Lighedstegnet kun kan være eet fuldstændigt arbitrært almindeligt Complement, nemlig paa høire Side det til Differerentiationsindex $(m_1 + m_2 + \ldots m_{i'})$ svarende Complement $\psi_{1,2,\ldots i'}(m_1 + m_2 + \ldots m_{i'}, x)$ og paa venstre Side det til den første Differentiationsindex m_1 svarende Complement $\psi_1(m_1, x)$, differentieret efterhaanden med alle de følgende Indices $m_2, \ldots m_{i'}$, saa at man faaer

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^{m_2}\psi_1(m_1, x)}{dx^{m_2}} &= \psi_{1,2}(m_1+m_2, x)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^{m_2+\dots m_{i'}}\psi_1(m_1, x)}{dx^{m_2+\dots m_{i'}}} &= \psi_{1,2,\dots i'}(m_1+m_2+\dots m_{i'}, x)\end{aligned}\right\} \quad (x)$$

Til enhver af de — efter den første Differentation med Index m_1 — efterhaanden med Indices $m_2, \dots m_{i'}$ foretagne Differentiationer maa der ligeledes henholdsvis føies $\psi_2(m_2, x), \dots \psi_{i'}(m_{i'}, x)$; men disse Complementer ere ikke arbitrære i samme Forstand som $\psi_1(m_1, x)$; thi de ere alene nødvendige, men tillige uundgaaeligt nødvendige, for Tilfredsstillelsen af Betingelserne (w), idet de skulle tjene til i venstre Side af (w) at gjenindføre de Led af $f(x)$, der ere forsvundne ved de forudgaaede Differentiationer, i den Form, hvorunder de findes i Resultatet, ɔ: i høire Side af (w). Complementerne $\psi_2(m_2, x), \dots \psi_{i'}(m_{i'}, x)$ ville derfor — efterat de tilligemed $\psi_1(m_2, x)$ ere blevne bestemte — kun komme til at indeholde arbitrære Constanter, naar $f(x)$ indeholder saadanne i de Led, der forsvinde ved de successive Differentiationer med Indices $m_1, m_2, \dots m_{i'-1}$. De Led, der forsvinde ved den sidste Differentiation med Index $m_{i'}$, ere ikke her medregnede; thi de ere de samme som dem, der ere forsvundne i høire Side af (w) ved den enkelte Differentiation med Index $(m_1 + m_2 + \dots m_{i'})$.

De Led af $f(x)$, der efterhaanden ville forsvinde ved de successive Differentiationer med $m_1, m_2, \dots m_{i'-1}$, ere de, der ere af Formerne $\psi(-m_1, x)$, $\psi(-m_1 - m_2, x)$, ... $\psi(-m_1 - m_2 - \dots m_{i'-1}, x)$. Naar derfor f. Ex.

$$f(x) = \Sigma K_{r'} x^{n_{r'}} + \psi_{(1)}(-m_1, x) + \psi_{(2)}(-m_1 - m_2, x) + \dots \\ \dots\dots + \psi_{(i'-1)}(-m_1 - m_2 - \dots m_{i'-1}, x)$$

ville Complementerne til $m_2, \dots m_{i'}$ blive

$$\left.\begin{aligned}\psi_2(m_2, x) &= \frac{d^{m_1+m_2}}{dx^{m_1+m_2}}\psi_{(1)}(-m_1, x)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_{i'}(m_{i'}, x) &= \frac{d^{m_1+m_2+\dots m_{i'}}}{dx^{m_1+m_2+\dots m_{i'}}}\psi_{(i'-1)}(-m_1 - m_2 - \dots m_{i'-1}, x)\end{aligned}\right\} \quad (y)$$

Er f. Ex. $\psi_{(1)}(-m_1, x) = Ax^{m_1-1-r'}$, bliver $\psi_2(m_2, x)$ $= A\,\dfrac{\gamma(m_1 - r')}{\gamma(-m_2 - r')}\,x^{-m_2-1-r'}$, og er $m_2 = -m_1$, faaes, ligesom i § 3 anført, $\psi_2(m_2, x) = \psi_{(1)}(-m_1, x) = \psi_{(1)}(m_2, x)$.

Om Rigtigheden af (y) vil man let kunne overbevise sig ved at give $f(x)$ den i (y) anførte Form og udføre de i Betingelserne (w) paa hver Side af Lighedstegnet antydede Regninger.

I Resultatet $\left\{\dfrac{d^{m_1+m_2+\ldots m_{i'}}}{dx^{m_1+m_2+\ldots m_{i'}}}f(x)\right\}$ ville altsaa Ledene af Formen $\psi(m_2 + \ldots m_{i'}, x)$ være $= \dfrac{d^{m_3+\ldots m_{i'}}}{dx^{m_3+\ldots m_{i'}}}\psi_2(m_2, x), \ldots\ldots.$ Ledene af Formen $\psi(m_{i'}, x)$ være $= \psi_{i'}(m_{i'}, x)$.

Er Resultatet $f(x)$, saa er $m_1 + m_2 + \ldots m_{i'} = 0$, og $\psi_{1,2,\ldots i'}(m_1 + m_2 + \ldots m_{i'}, x) = 0$, saa at, ifølge den sidste (x), Bestemmelsen af $\psi_1(m_1, x)$ af sig selv falder bort.

Er Resultatet $f(x)$ **umiddelbart** givet, da ere de andre Complementer $\psi_2, \ldots \psi_{i'}$ bestemte ved (y).

Er Resultatet $f(x)$ givet **implicite** ved Betingelsesligninger af sædvanlig Form (f. Ex. Differentialligninger af hel Orden), saa maa $\left\{\dfrac{d^{m_1}f(x)}{dx^{m_1}}\right\}$ først findes, hvilket f. Ex. kunde tænkes udført netop ved Hjælp af de givne Ligninger, efterat disse vare differentierede med en Index m saaledes beskaffen, at Ligningerne derved bragtes paa en, med Hensyn til Bestemmelsen af $\left\{\dfrac{d^{m_1}f(x)}{dx^{m_1}}\right\}$, simplere Form. Complementerne $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_{i'}$ bestemmes da ved Indsættelsen af $\left\{\dfrac{d^{m_{i'}}}{dx^{m_{i'}}}\ldots\left\{\dfrac{d^{m_2}}{dx^{m_2}}\left\{\dfrac{d^{m_1}f(x)}{dx^{m_1}}\right\}\right\}\ldots\right\} = f(x)$ i de givne Betingelsesligninger. Herved faaes alle ubekjendte Constanter bestemt, idet der ikkun vil kunne forblive saa mange arbitrære Constanter tilbage, som der ifølge de givne Betingelsesligninger skal være i $f(x)$.

Naar ved de i (w) foretagne Differentiationer Formlerne (6) og (7) have været benyttede, vil den foran fremstillede Betydning af de forskjellige Complementer kunne undergaae en simpel Modification; men en nærmere Betragtning deraf vil her neppe være nødvendig.

I de hyppigste Anvendelser vil, naar $f(x)$ er det søgte Resultat, i' være $=2$, altsaa $m_1+m_2=0$, eller $m_1=-m_2=-m$. Er i dette Tilfælde $f(x)$ ikke givet, som foran anført, explicite, eller implicite ved sædvanlige Betingelsesligninger; men, er der i Stedet derfor givet $\left\{\frac{d^{m_1}f(x)}{dx^{m_1}}\right\}=\left\{\frac{d^{-m}f(x)}{dx^{-m}}\right\}=F(x)$, saa maa Bestemmelsen af $\psi_2(m_2, x)=\psi(m, x)$ i $f(x)=\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left\{\frac{d^{-m}f(x)}{dx^{-m}}\right\}\right\}=\frac{d^m F(x)}{dx^m}+\psi(m, x)$ i Reglen ske — som i § 3 anført — derved, at $f(x)$ for visse Værdier af x, eller, mere almindeligt, at $\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde givne Betingelser (antage givne Værdier).

Naar saadanne Betingelser mangle, og $\psi(m, x)$ desuagtet kan bestemmes, saa er det fordi det i $\left\{\frac{d^{-m}f(x)}{dx^{-m}}\right\}=F(x)$ indgaaende bekjendte Complement $\psi_1(m_1, x)=\psi_1(-m, x)$ er saaledes beskaffent, at det kan være fremstaaet derved, at $\left\{\frac{d^{-m}f(x)}{dx^{-m}}\right\}$ er en Differentiation foretagen efter (6), eller (7), eftersom $m \gtrless 0$. Differentiation efter disse Formler kan nemlig medføre Led af Formen $\psi_1(-m, x)$, i hvilke Coefficienterne ere Funktioner af a, den lavere Grænse for Integralet i (6) og (7). Der foreligger da et $f(x)$ indeholdende bestemt Integral, som er $=$ en given Function, og man vil nu ved en nærmere Undersøgelse, som er foretagen i det følgende Hovedafsnits Art. 1 og 2, kunne slutte sig til, hvorledes $\psi_2=\psi(m, x)$ i $f(x)=\frac{d^m F(x)}{dx^m}+\psi(m, x)$ maa være beskaffen, for at de bekjendte Led $\psi_1(-m, x)$ i $F(x)$ kunne være fremstaaede.

I Stedet for $\left\{\frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}\right\} = F(x)$ kunde der, naar $f(x)$ er det søgte Resultat, mere almindeligt være givet

$$F\left(\left\{\frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}\right\}, \left\{\frac{d^{m_2} f(x)}{dx^{m_2}}\right\}, \ldots x\right) = 0$$

som er en Differentialligning af brudden, eller hvilkensomhelst Orden, der simplere skrives

$$F\left(\frac{d^{m_1} f(x)}{dx^{m_1}}, \frac{d^{m_2} f(x)}{dx^{m_2}}, \ldots x\right) = 0.$$

Brudne Differentialligninger ville, naar de ere lineære, ofte kunne fuldstændigt integreres og kunne i denne Form let komme for i Anvendelserne. Naar et fuldstændigt Integral $f(x)$ er fundet, maae de arbitrære Constanter deri kunne tænkes bestemte derved, at $\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}$ for visse Værdier af m og x skal opfylde visse Betingelser (have givne Værdier).

§ 10. Da (5) giver

$$\frac{d^m (x+a)^n}{dx^m} = \frac{d^m}{dx^m}\left(x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^2 x^{n-2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1-m)} x^{n-m} + \frac{n\gamma(n)}{1.\gamma(n-m)} x^{n-1-m} a + \frac{n(n-1)\gamma(n-1)}{1.2\gamma(n-1-m)} x^{n-2-m} a^2 + \ldots$$

$$= \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1-m)}\left(x^{n-m} + \frac{n-m}{1} x^{n-m-1} a + \frac{(n-m)(n-m-1)}{1\,.\,2} x^{n-m-2} a^2 + \ldots\right)$$

$$= \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1-m)} (x+a)^{n-m} = \frac{d^m (x+a)^n}{d(x+a)^m},$$

saa er i Almindelighed

$$\frac{d^m f(x+a)}{dx^m} = \frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m} \tag{13}$$

som dog kun kan være nøiagtigt gjældende, naar Rækken for $f(x+a)$ efter Potenser af $(x+a)$ **ikke** indeholder positiv, eller negativ hele Potensexponenter $(n = \pm(1+n'))$; thi, naar Potensexponenterne i Rækken ere positiv, eller negativ hele, ville $\frac{d^m f(x+a)}{dx^m}$ og $\frac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m}$ differere ved Led af Formen $\psi(m,x) = x^{-m-1}\Sigma C_{r'}x^{-r'}$, eller af Formen $\psi_1(m, x+a) = (x+a)^{-m-1}\Sigma K_{r'}(x+a)^{-r'}$ med bestemte Coefficienter $C_{r'}$, eller $K_{r'}$. Det Samme gjælder med Hensyn til constante Led $(n=0)$ i $f(x+a)$.

Dette ses for $n = n'$ let af den foranstaaende Udvikling, idet Rækken for $(x+a)^{n'}$ bliver endelig, medens $\frac{d^m (x+a)^{n'}}{d(x+a)^m} = \frac{\gamma(1+n')}{\gamma(1+n'-m)}(x+a)^{n'-m}$ kommer til at indeholde Led af Complementet $\psi(m, x)$, begyndende med $\frac{a^{1+n'}}{(1+n').\gamma(1+n'-m)} \cdot \frac{\text{«}-m+n'\text{»}}{\text{«}-m\cdot-1\text{»}} x^{-m-1}$. De foranværende Led af Rækken for $\frac{d^m(x+a)^{n'}}{d(x+a)^m} = \frac{\gamma(1+n')}{\gamma(1+n'-m)}(x+a)^{n'-m}$ efter stigende Potenser af a ville netop være $= \frac{d^m(x+a)^{n'}}{dx^m}$, og disse Led, der ikke ere af Formen $\psi(m, x)$, ville derimod kunne bringes paa Formen $\psi_1(m, x+a)$. Naar $m = m'$, bortfalde Ledene af Complementet $\psi(m', x)$.

Naar $n = -(1+n')$, bevises Rigtigheden af de ved Formlen (13) gjorte Bemærkninger ved at udvikle $(x+a)^{-1-n'}$ i Række efter stigende Potenser af a og differentiere efter $(5)'$. Man finder da

$$\frac{d^m(x+a)^{-1-n'}}{dx^m} - \frac{d^m(x+a)^{-1-n'}}{d(x+a)^m} = \frac{(-1)^{n'+1}}{[n'].\gamma(-n'-m)}(x+a)^{-m-1-n'}\, l\frac{x+a}{x}$$

som kan bringes saavel paa Formen $\psi(m, x)$ som paa Formen $\psi_1(m, x+a)$, idet den største Potensexponent til x, eller til $(x+a)$ bliver $\div m \div 1 \div (1+n')$.

§ 11. Der staaer endnu kun tilbage at paavise Muligheden af den fuldstændige Integration af de i Slutningen af § 9 omtalte lineære Differentialligninger af hvilkensomhelst (brudden) Orden. Som Exempel paa saadanne Ligninger skal her ikkun anføres

$$\frac{d^m y}{dx^m} + a x^n y = 0$$

Sættes

$$y = x^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i' p}$$

faaer man, ifølge (5), ved Indsættelse i den givne Differentialligning,

$$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} \frac{\gamma(q+i'p+1)}{\gamma(q+i'p+1-m)} x^{i'p-m} + a \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i'p+n} = 0$$

Er $n = -m$, maa p være $= 0$, saa at man, ved at sætte $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = C$, faaer

$$y = Cx^q, \text{ eller } y = \Sigma C_q x^q,$$

idet q maa bestemmes som Rod i Ligningen

$$\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m)} + a = 0$$

der i Almindelighed maa løses ved Hjælp af Formlerne (3) og (4), eller (4)' i Forbindelse med Tabellerne over ΓFunctionen; men, naar m er $= m'$, antager Ligningen Formen

$$\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m')} = \frac{«q»}{«q-m'»} = q(q-1)(q-2)\ldots(q-m'+1) = -a$$

som giver m' Værdier for q, svarende til de m' particulære Integraler $y = C_q x^q$.

Ligeledes vil Ligningen til Bestemmelsen af q for $m = \div m'$ antage Formen

$$\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1+m')} = \frac{«q»}{«q+m'»} = \frac{1}{(q+m')(q+m'-1)\ldots(q+2)(q+1)} = -a$$

saa at f. Ex. Ligningen $\dfrac{d^{-2}y}{dx^{-2}} + a x^2 y = 0$ giver

$$y = C_1 x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{a}}} + C_2 x^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{a}}}$$

Er $n \gtrless - m$, maa man sætte

$$A_0 \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m)} = 0, \quad i'p - m = (i'-1)p + n \text{ og}$$

$$A_{i'} \frac{\gamma(q+i'p+1)}{\gamma(q+i'p+1-m)} + aA_{i'-1} = 0,$$

hvilke 3 Betingelser give

$$q = m - 1 - r', \quad \text{idet } r' = 0, 1, 2, \ldots \infty,$$

$$p = m + n \quad \text{og}$$

$$A_{i'} = -\frac{\gamma(i'm + i'n - r')}{\gamma((i'+1)m + i'n - r')} aA_{i'-1}$$

hvorved alle Coefficienterne ere bestemte med Undtagelse af een, f. Ex. A_0, som forbliver arbitrær ved enhver Værdi af r' og derfor kunde betegnes ved $C_{r'}$. Det fuldstændige Integral bliver da

$$y = x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{A_{i'}}{C_{r'}} x^{i'(m+n)}$$

eller

$$y = x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \left(1 - \frac{\gamma(m+n-r')}{\gamma(2m+n-r')} ax^{m+n} + \frac{\gamma(m+n-r')\,\gamma(2m+2n-r')}{\gamma(2m+n-r')\,\gamma(3m+2n-r')}(ax^{m+n})^2 + \ldots\right)$$

Er $m = m'$, faaer r' ikkun Værdierne $0, 1, 2, \ldots (m'-1)$, og, ifølge (3), bliver da

$$A_{i'} = -\frac{«i'(m'+n) - 1 - r'»}{«i'(m'+n) - 1 - r' + m'»} aA_{i'-1}$$

At r', naar m er $= m'$, ikke kan faae Værdierne $m', m'+1, \ldots \infty$, følger af den første Betingelse, der bliver

$$A_0 \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1-m')} = A_0 \frac{\gamma(m'-r')}{\gamma(-r')} = 0,$$

og som, ifølge (a), eller (12), kun kan være tilfredsstillet, naar

$$m' - r' > 0,$$

altsaa kun for $r' = 0, 1, 2, \ldots (m'-1)$.

Naar m er $= - m'$, vil Betingelsen $A_0 \frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+1+m')}$ $= A_0 \frac{\gamma(-m'-r')}{\gamma(-r')} = 0$ ikke kunne tilfredsstilles ved nogen endelig Værdi af r', saa at Integralet i dette Tilfælde ikke kan have den antagne Form; men man vil da kunne sætte $\frac{d^{-m'} y}{dx^{-m'}} = z$ og $y = \frac{d^{m'} z}{dx^{m'}}$.

Rækken for y vil være convergent, eller divergent, eftersom

$$Lim_{i'} \frac{\gamma(i'(m+n)-r')}{\gamma(i'(m+n)-r'+m)} ax^{m+n} = R \lesseqgtr 1,$$

som maa afgjøres efter de i Formlerne (3), (4), (4)', (11) og (12) indeholdte Egenskaber ved γ Functionen. Af disse følger, at ved endelige Værdier af x og r' vil

$m+n > 0$ og $m > 0$ give $R = 0$ og Rækken conv.
$m+n > 0$ og $m < 0$ give $R = \pm\infty$ og Rækken div.

Naar $(m+n)$ er < 0, bliver Værdien af R i Almindelighed ubestemt; men man vil kunne forandre Fortegnet for m og $(m+n)$ ved at sætte $\frac{d^m y}{dx^m} = z$ og $y = \left\{\frac{d^{-m} z}{dx^{-m}}\right\}$.

Forøvrigt vilde

$m+n < 0$, brudden, og $m = m'$ give $R = 0$ og Rækken conv. $(x \gtrless 0)$,
$m+n = \div p'$ og $m \gtrless 0$, brudden, give $R = \pm\infty$ og Rækken div.
$m+n = \div p'$ og $m = m' \leqq p' + r'$ give $R = 0$ og Rækken conv.

Foruden det allerede behandlede Tilfælde $n = - m$ kunde der endnu være særlig Anledning til at undersøge Tilfældene $n = - 2m$ og $m+n = \pm p'$; men, da jeg i den hidtil givne Fremstiling af Grundtrækkene af min Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices ikkun har villet antyde Methodens Anvendelser, ville de nævnte specielle Tilfælde, som kræve vende vidtløftigere Undersøgelser, blive behandlede under den i det følgende Hovedafsnits Art. 5 givne almindelige Theori for Integrationen af lineære Differentialligninger af hvilkensomhelst Orden.

II. Anvendelser af Methoden.

Indledende Bemærkninger.

Hensigten med dette 2det Hovedafsnit er at stille de foran udviklede Grundsætninger for Differentiation med hvilkesomhelst Indices i et klarere Lys, navnligen igjennem en Række af Anvendelser, og at godtgjøre, at Methoden i alle Anvendelser vil kunne træde i Stedet for Liouvilles Methode, samt at den er noget mere end en slet og ret mathematisk Curiositet, idet den formentligen vil kunne finde en vidtstrakt Anvendelse saavel i de forskjellige Grene af Mathematiken som i den mathematiske Physik.

I 1ste Hovedafsnit har jeg allerede anført adskillige saadanne Anvendelser, saasom Reductionen af visse lineære Differentialligninger af Ordenen m' til Ordenen $(m'-1)$, Resultater udledede ved Sammenstillingen af forskjellige Udtryk for $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ osv. Jeg har ligeledes berørt, men ikke nærmere udviklet, at man, naar F er en bekjendt Function, vil kunne finde Functionen f af $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\,dt = F(x)$. Det er blandt Andet dette Problem — saavelsom andre dermed beslægtede, saasom Bestemmelsen af en Function ved Hjælp af Differentialligninger af brudden Orden osv. —, der her vil blive Gjenstand for en omhyggeligere Undersøgelse.

De Exempler, der i det Følgende ville forekomme, ere for største Delen tidligere behandlede (se Tidsskr. f. Mathematik 1868, Pag. 89—109) af Liouville ved hans Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Det vilde neppe have været vanskeligt at finde andre lignende Exempler; men jeg har netop fortrinsvis valgt hine, dels fordi de, med enkelte Tilføielser og Udvidelser, ere tilstrækkelige til at belyse de nævnte

Anvendelser af min Methode, dels fordi det har været mig magtpaaliggende at godtgjøre, at denne, uagtet den hviler paa et fra Liouvilles ganske forskjelligt Grundlag, ikke destomindre er mere end tilstrækkelig til at løse alle de Problemer, der kunne løses ved Liouvilles. Iøvrigt har jeg fremstillet flere af disse Exempler under en almindeligere Form og søgt at behandle dem paa en saadan Maade, at det vigtigste Formaal for dette Hovedafsnit, nemligen at stille Anvendelsen af min Methode tydeligt frem og klare alle Tvivl, formentligen vil være fuldstændigt naaet. Overalt har jeg havt to Ting for Øie, som Liouville tildels har ignoreret, nemlig Betingelserne for Muligheden af en Løsning af Problemet og Bestemmelsen af Complementet.

Hvad specielt de Problemer angaaer, der kræve Bestemmelsen af f i $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu\div 1} f(t)\,dt = F(x)$, da fordrer deres Løsning efter Liouvilles Methode, at Problemet er af en saa speciel Natur, at a er uendelig, og at $f(x)$ kan udvikles efter Potenser af e^x med negative Exponenter ($f(\infty) = 0$), medens, som det senere vil blive vist, Problemet kan løses efter min Methode for en hvilkensomhelst Værdi af a. Derimod kan naturligvis ved dette Problem f ikke være en hvilkensomhelst Function, da det jo her fordres, at Integralet skal have den endelige Værdi $F(x)$.

Forinden jeg derfor kan gaae over til den egentlige Løsning af det sidstnævnte Problem, vil det være nødvendigt i et særskilt Afsnit (Art. 1) at underkaste Formlerne (6) og (7) en dyberegaaende Undersøgelse end den, som jeg maatte anse for tilstrækkelig i det foregaaende Hovedafsnit til en Fremstilling af Grundtrækkene af min Methode.

De følgende Afsnit ville derefter efter Haanden behandle:

Bestemmelsen af f, naar a i $\int_a^x (x-t)^{m'+\mu-1} f(t)\,dt$ har en hvilkensomhelst endelig Værdi (eller 0);

Bestemmelsen af f, naar a er uendelig;

Bestemmelsen af Functioner, forekommende i Integraler, der kunne transformeres til $\int_a^x (x - t)^{m'+\mu-1} f(t)\, dt$;

Integration af og Anvendelser af Differentialligninger af hvilkensomhelst (brudden) Orden;

Integration af en lineær Differentialligning af 2den Orden ved Hjælp af hvilkesomhelst Differentiations-indices;

En almindelig Betragtning med Hensyn til Naturen af de Problemer, hvis Løsning kræver en Anvendelse af Differentiation med hvilkesomhelst Indices, samt slutteligen Bemærkninger angaaende Differentiation med Hensyn til flere Variable.

For at undgaae Forvexling med 1ste Hovedafsnits Formler, til hvilke der hyppigt vil blive henvist, ville Formlerne i det Følgende blive betegnede paa en anden Maade. — Naar det ikke udtrykkeligen bemærkes om en Størrelse m, at den er enten > 0, eller < 0, vil den — ligesom i 1ste Hovedafsnit — efter Omstændighederne blive betegnet ved $\pm (m' + \mu)$.

Art. 1. **Almengyldigheden af Formlerne (6) og (7) samt Beskaffenheden af de Functioner f, der give en endelig Værdi for $\int_a^x (x - t)^{m-1} f(t)\, dt$, $(m > 0)$, og omvendt.**

Ved Formlen i § 5

$$\frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} = \int^{(m)} f(x)\, dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x - t)^{m-1} f(t)\, dt \qquad (m > 0) \tag{6}$$

er tilføiet den Bemærkning: «idet a er en vilkaarlig Constant, som i numerisk Henseende er $< x$». Kan x blive $= 0$, maa a være $= 0$.

Det i § 5 indeholdte Bevis for Almengyldigheden af (6) stiller nemlig kun den ene Fordring til a, at $(x - t)^{m-1}$ skal kunne udvikles efter Potenser af t med stigende Potensexponenter.

At denne Fordring er stillet følger deraf, at det er bemærket, at $\int_a^b (x-t)^{m-1} f(t)\, dt$, hvori b er en vilkaarlig Constant, indeholder Led af Complementet $\psi(-m, x) = x^{m-1} \Sigma C_{r'} x^{-r'}$, hvilken Bemærkning kun er rigtig under den Forudsætning, at $(x-t)^{m-1}$ udvikles med positive hele Potensexponenter for t og ikke for x. — Den eneste Betingelse for a er altsaa den, at $(x - t)^{m-1}$ skal kunne udvikles efter stigende Potenser af t. Under sin Variation mellem a og x maa derfor t bestandigt forblive numerisk $< x$, ɔ: a maa i numerisk Henseende være $< x$ og kan altsaa ikke være $= \pm \infty$. At a ikke kan være uendelig, vil ogsaa kunne ses af Anm. til § 5, som viser, at venstre Side af (6) for den specielle Værdi $a = \infty$ og for de specielle Functionsformer $f(x)$, der tillade en Rækkeudvikling efter Potenser af e^x med negative Exponenter ($f(\infty) = 0$), bliver = Liouvilles Integral med Index m, taget med Hensyn til x af $f(x)$.

Almengyldigheden af Formlen (6) blev i § 5 først directe bevist for saadanne Functioner $f(x)$, hvis Rækkeudvikling efter Potenser af x alene indeholdt Potensexponenter, der vare $> \div 1$, saa at altsaa $lim\, \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, og Beviset blev dernæst udstrakt til alle Functioner, altsaa ogsaa til saadanne, hvis Rækkeudvikling efter Potenser af x kunde indeholde Exponenter, der vare $< \div 1$. Den sidste Del af Beviset kunde paa det daværende Stadium af Fremstillingen ikkun føres paa indirecte Maade. Ved Hjælp af den senere erholdte Formel (p) i § 7, der er gjældende for hvilkesomhelst positive, eller negative Værdier af m, kan nu ogsaa dette Bevis let føres directe. Det vil i dette Øiemed være tilstrækkeligt i (6) at sætte $f(t) = Ct^n$, idet n er et hvilketsomhelst Tal. Ved Rækkeudvikling af $(x - t)^{m-1}$ efter stigende Potenser af t faaes da

$$\int^{(m)} Cx^n\, dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1}\, Ct^n\, dt =$$

$$C\frac{x^{n+m}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{(r'+n+1)\,.\,[r']} \, \frac{«m-1»}{«m-1-r'»}$$

$$-\,C\frac{a^{n+1}\, x^{m-1}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} \, \frac{«m-1»}{«m-1-r'»} \, \frac{a^{r'}\, x^{-r'}}{n+1+r'}$$

men, ombyttes nu i Formlen (p) i § 7 m med $-(n+1)$ og $(a'+a)$ med m, faaes

$$\int^{(m)} Cx^n\, dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1}\, Ct^n\, dt =$$

$$C\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)}\, x^{n+m} - C\frac{a^{n+1}\, x^{m-1}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} \, \frac{«m-1»}{«m-1-r'»} \, \frac{a^{r'}\, x^{-r'}}{n+1+r'}$$

som viser, at det ved (6) erholdte Resultat ikkun kan differere fra det Resultat, som Grundformlen (5) giver, ved Led af Complementet $\psi(-m, x)$, samt at disse Led ville forsvinde, naar $a = 0$ og $n > -1$.

Af ovenstaaende Formel erholdes let

$$\left.\begin{aligned} \int_a^{(m)} C(x-a)^n\, dx^m &= \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1}\,.\, C(t-a)^n\, dt = \\ & C\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)}\, (x-a)^{n+m} - \\ C\lim_{\varepsilon}\, (x-a)^{m-1} & \frac{\varepsilon^{n+1}}{\gamma(m)} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{(-1)^{r'}}{[r']} \, \frac{«m-1»}{«m-1-r'»} \, \frac{\varepsilon^{r'}(x-a)^{-r'}}{n+1+r'} \end{aligned}\right\} \quad (a) \quad (m>0)$$

som for $m > 0$ giver et nyt Bevis for Sætningen $\frac{d^{-m} f(x+a)}{dx^{-m}} = \frac{d^{-m} f(x+a)}{d(x+a)^{-m}}$, der, med de til Formlen (13) i § 10 knyttede Bemærkninger, er bevist at gjælde for hvilkesomhelst positive og negative Værdier af m.

I Formlen (a) har jeg i Stedet for $\int^{(m)} C(x-a)^n\, dx^m$ skrevet $\int_a^{(m)} C(x-a)^n\, dx^m$, idet jeg i det Følgende stedse vil bruge Betegnelsen $\int_a^{(m)} f(x)\,dx^m$ i Stedet for $\int^{(m)} f(x)\,dx^m = \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}}$ overalt, hvor Differentiationen med Index $-m$ er udført (med a som Grænse i Integralet) efter Formlen (6), som — i Modsætning til Formlerne (5), (5)', (9) og (10) — **kan** give Led af Complementet $\psi(-m, x-a) = (x-a)^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} K_{r'}(x-a)^{-r'}$.

Formlen (6) maa da med den nye Betegnelse skrives

$$\int_a^{(m)} f(x)\,dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t)\,dt;\ (m>0) \tag{(6)}$$

som indeholder Definitionen paa den særegne Differentiation med Index $-m$, der betegnes ved $\int_a^{(m)} f(x)\,dx^m$

Forestiller man sig nu $f(x) = f(a+\varepsilon)$ udviklet i Række efter Potenser af $\varepsilon = x-a$, saa vil Formlen (α) give et af Ledene i

$$\int_a^{(m)} f(x)\,dx^m = \frac{1}{\gamma(m)} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t)\,dt = \frac{1}{\gamma(m)} F(x);\ (m>0),$$

og man vil derfor af (α) kunne, med Hensyn til Beskaffenheden af Functionerne f og F, udlede forskjellige Slutninger, som det vil være nødvendigt at have gjort, forinden man af F som given vil kunne bestemme f. Der vil ved denne Undersøgelse blive skjælnet mellem 2 Hovedtilfælde, nemlig $n > -1$ og $n < -1$, og af det sidste vil atter $n = -m-1-r'$ være et specielt Tilfælde.

Det ses da for det Første af (α), at $\int_a^x (x-t)^{m-1} f(t)\,dt = F(x)$ i Almindelighed vil kunne indeholde Led af Complementet $\psi(-m, x-a) = (x-a)^{m-1} \Sigma K_{r'}(x-a)^{-r'}$; men, naar Potensexponenterne n i Rækken for $f(x) = f(a+\varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x-a$ ere > -1, og altsaa $lim\ \varepsilon f(a+\varepsilon)$

$= 0$, ville Ledene af Complementet forsvinde, og Potensexponenterne i Rækken for $F(x) = F(a+\varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ville da være $> m - 1$, og følgelig $lim \frac{F(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0$.

Er altsaa $m > 1$, vil man faae $lim\, F(a+\varepsilon) = F(a) = 0$. Ligeledes faaes $F(a) = 0$, naar $m = \mu < 1$, og Potensexponenterne n ere $> -\mu$. Naar derimod $m = \mu$ og $-1 < n \leqq -\mu$, vil Værdien $F(x)$ af Integralet ikke forsvinde, naar Grændserne blive ligestore, ɔ: naar $lim\,(x - a) = lim\, \varepsilon = 0$; men $F(a)$ vil blive uendelig, eller constant og $= F(x)$, eftersom $n \lesseqgtr -\mu$. I alle Tilfælde bliver dog, naar Potensexponenterne n i $f(x)$ ere > -1, $lim \frac{F(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0$.

Naar enten alle, eller nogle af Potensexponenterne n i Rækken for $f(x)$ ere < -1, vil (a) for ethvert saadant af Ledene $C(x-a)^n$ give et for endelige Værdier af n endeligt Antal Led af Complementet $\psi(-m, x-a)$ med uendelige Coefficienter. Er $n = -m - 1 - r'$, vil der til et saadant Led af $f(x)$ ikkun svare Led i $F(x)$ af Formen $\psi(-m, x-a)$, idet da $C \frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)}(x-a)^{n+m}$ bliver $= 0$. Det vil endvidere ses af (a), at, naar der i Rækken for $f(x)$ findes Led med Potensexponenter n, der ere < -1, maae de **tilsvarende** Led af $F(x)$ forsvinde for $x = a$; thi Ledene i (a) af Formen $\psi(-m, x-a)$ ville da ved Formlen (p) i § 7 reduceres til $\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)}\varepsilon^{n+m}$, saa at (a) for $n < -1$ og $x - a = lim\, \varepsilon = 0$ giver 0 til Resultat. Naar omvendt $F(x)$ indeholder Led af Complementet $\psi(-m, x-a)$, saa maa der i Rækken for $f(x)$ findes Potensexponenter, der ere < -1. Men, naar $F(x)$ skal være endelig — og fra denne Forudsætning ville vi gaae ud — saa maae, idet ethvert enkelt Led af $f(x)$, for hvilket n er < -1, giver et uendeligt Resultat i $F(x)$, saadanne Led af $f(x)$ være til Stede i uendeligt Antal og være Rækkeudviklingen for en Function, der, som f. Ex. $C(x-a)^n e^{-\frac{p^2}{x-a}}$, forsvinder for $x=a$. Den hertil svarende Del af $F(x)$ maa, som ovenfor bemærket, ligeledes forsvinde for $x=a$; men, tænkes den udviklet efter Potenser af $(x-a)$ og sondret i 2 Grupper, den ene ikke indeholdende Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, den anden indeholdende Led af denne Form, vil enhver af disse Grupper for sig blive uendelig for $x=a$. Kun naar den første af disse Grupper er $=0$, ɔ: ikke existerer, altsaa naar $f(x)$ indeholder en Function, der, som f. Ex. $C(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$, er af Formen $\psi(m, x-a) = (x-a)^{-m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} k_{r'} (x-a)^{-r'}$ og forsvinder for $x=a$, vil der, ifølge (a), hertil i $F(x)$ ikkun svare Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, som maae forsvinde for $x=a$ og altsaa f. Ex. muligvis kunde være af Formen $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$.

Omvendt, naar $F(x)$ indeholder Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, der, som f. Ex. $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$, **forsvinde for** $x=a$, saa er dette et Tegn paa, at der til dem svarer Led i $f(x)$, som ere af Formen $\psi(m, x-a)$, og som ligeledes maae forsvinde for $x=a$, saa at de f. Ex. kunde være af Formen $k(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p^2}{x-a}}$. Findes der derimod ikke i $F(x)$ Led af Formen $\psi(-m, x-a)$, **der forsvinde for** $x=a$, saa indeholder $f(x)$ ingen Led af Formen $\psi(m, x-a)$, saa at $\frac{1}{\gamma(m)} \frac{d^m F(x)}{dx^m}$, beregnet efter (5), eller en anden af de Formler, der ikke kunne medføre Led af Complementet $\psi(m, x-a)$, maa indeholde alle Ledene af $f(x)$ og være nøiagtigt $=f(x)$.

Vi have exempelvis anført, at der til Led af $F(x)$ af Formen $K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$, $(p>0)$, kunde svare Led af $f(x)$ af Formen $k(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$. Dette finder i Virkeligheden Sted. Sættes nemlig $\frac{p}{t-a} = \frac{p}{x-a} + y$, faaes, idet y maa være >0,

$$\int_a^x (x-t)^{m-1} \cdot k(t-a)^{-m-1} e^{-\frac{p}{t-a}} dt =$$

$$\frac{k}{p^m} (x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}} \int_0^\infty y^{m-1} e^{-y} dy =$$

$$\gamma(m) \frac{k}{p^m} (x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$$

Forandrer man heri $\gamma(m) \dfrac{k}{p^m}$ til K, faaer man, ifølge ((6)), Formlen

$$\int_a^{(m)} p^m K(x-a)^{-m-1} e^{-\frac{p}{x-a}} dx^m = K(x-a)^{m-1} e^{-\frac{p}{x-a}} \qquad (\beta)$$
$$(p > 0)$$

Ved den samme Substitution finder man den tilsyneladende mere almindelige, men desuagtet mindre anvendelige Formel

$$\int_a^{(m)} C(x-a)^{-m-1-r'} e^{-\frac{p}{x-a}} dx^m =$$

$$\frac{C}{p^m} (x-a)^{m-1-r'} e^{-\frac{p}{x-a}} \sum_{i'=0}^{i'=r'} \frac{\text{«}m-1+i'\text{»}}{\text{«}m-1\text{»}} \frac{\text{«}r'\text{»}}{\text{«}r'-i'\text{»}} \frac{(x-a)^{i'}}{|i'| \cdot p^{i'}} \ldots\ldots (\beta)'$$
$$(p > 0)$$

Sætter man $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, idet $F_1(x)$ er fremstaaet af alle de Led af Rækken for $f(x) = f(a+\varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$, hvis Potensexponenter ere > -1, og $F_2(x)$ fremstaaet af alle de Led i $f(x)$, hvis Potensexponenter ere < -1, saa have vi fundet, at man maa have $lim \dfrac{F_1(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0$ og $lim\, F_2(a+\varepsilon) = F_2(a) = 0$; men den sidste Betingelse kan — idet den er fremstaaet derved, at de Led af (a), der ere af Formen $\psi(-m, x-a)$, ophæve for $x = a$ de Led af (a), der ikke ere af denne Form — aabenbart forandres til $lim \dfrac{F_2(a+\varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0$, idet p er et hvilketsomhelst Tal. — Betingelsen

$$lim_\varepsilon \frac{F(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0 \qquad (\gamma)$$

maa derfor i alle Tilfælde være opfyldt.

Naar Rækkeudviklingen for $f(x) = f(a+\varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ indeholder negative hele Potensexponenter, eller naar

Rækken for $f(a+\varepsilon)$ indeholder Led af Formen $C(x-a)^n . l(x-a)$, er (α) ikke gjældende for saadanne Led; men man vil let — paa lignende Maade som de for disse Tilfælde gjældende Formler $(5)'$ og (10) ere udledede — kunne finde en til (α) svarende Formel, der ligesom denne vil lede til de ovenfor fundne Resultater.

Hvad der er bemærket om Formlen (6), kan let overføres paa Formlen

$$\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} = \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} . \int_a^x (x-t)^{-\mu} f(t)\, dt$$

$$= \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} . \int_a^{(1-\mu)} f(x)\, dx^{1-\mu} \qquad ((7))$$

som er gjældende for enhver Værdi af a, der i numerisk Henseende er $< x$.

I Modsætning til Grundformlen (5), Formlerne $(5)'$ og (10), (9) og betingelsesvis (8) vil $((7))$ i Almindelighed give Led af Complementet $\psi(m, x-a) = (x-a)^{-m-1} \Sigma k_{r'} (x-a)^{-r'}$; men, naar $\lim \varepsilon f(a+\varepsilon) = 0$ derved, at Potensexponenterne i Rækken for $f(x) = f(a+\varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ere > -1, vil $((7))$ ikke indeholde Led af Complementet $\psi(m, x-a)$ og altsaa give samme Resultat som de andre Formler.

Naar $f(x)$ er af Formen $\psi(-m, x-a) = (x-a)^{m-1} \Sigma K_{r'} (x-a)^{-r'}$, vil $((7))$ **alene** give Led af Complementet $\psi(m, x-m)$; thi $\dfrac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}}$ vil da, beregnet efter Grundformlen (5), være $= 0$. Naar i dette Tilfælde $\lim f(a+\varepsilon) = 0$, vil $((7))$ kunne give et endeligt Resultat af Formen $\psi(m, x-a)$; men en til (β) svarende Formel vil dog kun kunne fremstilles, naar $m' = 0$, idet man da faaer

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^\mu . K(x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}}{dx^\mu} = \\ &\frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} . \int_a^x (x-t)^{-\mu} . K(t-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{t-a}} dt \\ &= \frac{d}{dx} . \int_a^{(1-\mu)} K(x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}} dx^{1-\mu} \\ &= p^\mu K . (x-a)^{-\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}\end{aligned}\right\} \quad (\delta) \quad (p > 0)$$

Dette Resultat erholdes ved først at sætte $\frac{x-t}{t-a} = y$, derdernæt udføre Differentiationen med Hensyn til x og endeligen sætte $\frac{p}{x-a} y = z$.

Naar man sætter $\int_a^x (x-t)^{-\mu} f(t)\, dt = \int_0^{x-a} t^{-\mu} f(x-t)\, dt$, vil det let ses, at Formlen ((7)) kan skrives

$$\begin{aligned}\frac{d^{m'+\mu} f(x)}{dx^{m'+\mu}} &= \frac{1}{\gamma(1-\mu)} \frac{d^{m'-p'}}{dx^{m'-p'}} . \int_a^x (x-t)^{-\mu} \overset{(p'+1)}{f}(t)\, dt \\ &= \frac{d^{m'-p'}}{dx^{m'-p'}} \int_a^{(1-\mu)} \overset{(p'+1)}{f}(x)\, dx^{1-\mu} \qquad ((7))''\end{aligned}$$

forudsat at $f^{(p')}(a) = 0$. — Iøvrigt vil vistnok denne Formel som oftest i Praxis vise sig mindre hensigsmæssig end ((7)). Et Exempel herpaa er $m' = 0$ og $f(x) = (x-a)^{\mu-1} e^{-\frac{p}{x-a}}$; vilde man her anvende ((7))'' og sætte $p' = m' = 0$, saa vilde det i (δ), ved Advendelsen af ((7)), fremkomne Resultat vanskeligt kunne findes. En Værdi af p', som vilde kunne give $f^{(p'+1)}(t) = 0$, kan selvfølgelig ikke anvendes i ((7))''.

Anm. De for Anvendelserne vigtigste Resultater af Undersøgelserne i denne Art. ere kort gjengivne i det franske Résumé, som overhovedet formenes at ville lette Oversigten over Methoden i sin Helhed.

Art. 2. **Bestemmelse af Functionen f i Ligningen**

$$\int_a^\xi (\xi - x)^{m-1} f(x)\, dx = F(\xi)$$

hvori $m > 0$, a ikke uendelig og F en bekjendt Function.

Dette Problem er i Grunden fuldstændigt løst ved den i Art. 1 foretagne Undersøgelse. Vi kunne derfor her indskrænke os til at give en kortfattet Fremstilling af Løsningen.

Hvis $F(\xi)$ indeholder Led af Formen $\psi(-m, \xi - a) = (\xi - a)^{m-1} \Sigma K_{r'} (\xi - a)^{-r'}$, **som forsvinde for** $\xi = a$, saa maa man begynde med at udsondre dem af $F(\xi)$. **Betegnes disse Led af $F(\xi)$ ved $\Psi(\xi - a)$**, saa bliver ifølge ((6)), Ligningen til Bestemmelsen af f

$$\int_a^\xi (\xi - x)^{m-1} f(x)\, dx =$$

$$\gamma(m) \int_a^{(m)} f(\xi)\, d\xi^m = F(\xi) = G(\xi) + \Psi(\xi - a) \qquad \text{I}$$

I denne Ligning kan altsaa $G(\xi)$ muligvis ogsaa, ligesom Ψ, indeholde Led af Formen $\psi(-m, \xi - a)$; men disse Led ville ikke, saaledes som Ψ, forsvinde for $\xi = a$, men tværtimod derved blive uendelige.

Naar man differentierer I med Index m med Hensyn til ξ ved een, eller flere af de Formler, der, som f. Ex. (5), ikke kunne indføre Led af Complementet $\psi(m, \xi - a)$, vil Ψ forsvinde og ligeledes de Led, der maatte findes i $G(\xi)$ af Formen $\psi(-m, \xi - a)$. Man faaer da, ved at forandre ξ til x og efter de nævnte Formler foretage en «fuldstændig» Differentiation

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\gamma(m)} \left\{\frac{d^m F(x)}{dx^m}\right\} = \frac{1}{\gamma(m)} \left(\frac{d^m F(x)}{dx^m} + \psi(m, x-a)\right), \\ \text{idet} \qquad & \int_a^{(m)} \psi(m, x-a)\, dx^m = \Psi(x-a) \end{aligned}\right\} \qquad \text{II}$$

som, ifølge det i Art. 1 Udviklede, nødvendigvis maa indeholde alle Led af $f(x)$; thi vel kan der i $\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m G(x)}{dx^m}$ være forsvundet Led af Formen $\psi(-m, x-a)$; men disse høre, ifølge (α), sammen med andre Led, $C\frac{\gamma(1+n)}{\gamma(1+n+m)}x^{n+m}$, som ved Differentiationen med Index m give de Led, Cx^n, af $f(x)$, som have frembragt alle hine Led i $G(x)$. Derimod ville de Led af $f(x)$, der have frembragt Ψ, ikke kunne findes i $\frac{1}{\gamma(m)}\frac{d^m F(x)}{dx^m}$, men maae bestemmes ved den anden Ligning II. Disse Led af $f(x)$, multiplicerede med $\gamma(m)$, eller **Complementet** $\psi(m, x-a)$ **til** $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ **vil altsaa blive** $= 0$, **naar** $\Psi = 0$, **og dette vil som oftest være Tilfældet,** da Ψ jo er en Function af en ganske speciel Form.

Naar Functionen $\Psi(x-a)$ ikke er $=0$, vil den i Reglen bestaae af, eller kunne bringes til at bestaae af Led af Formen $K(x-a)^{m-1}e^{-\frac{p}{x-a}}, p>0$, og $\psi(m, x-a)$ kan da bestemmes ved Formlen (β) i Art. 1.

Af saadanne Former for $\Psi(x-a)$ kan, foruden

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(x-a) = (x-a)^{m-1}\Sigma K_{r'}e^{-\frac{p_{r'}}{x-a}}, \ (p_{r'}>0), \\ &\text{som giver} \\ &\psi(m, x-a) = (x-a)^{-m-1}\Sigma p_{r'}^m K_{r'}e^{-\frac{p_{r'}}{x-a}} \end{aligned}\right\} \quad \text{II. a}$$

mærkes

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(x-a) = (x-a)^{m-1}\int_c^b \varphi(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{x-a}}d\alpha, \\ &\text{som giver} \\ &\psi(m, x-a) = (x-a)^{-m-1}\int_c^b (\alpha^2)^m\varphi(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{x-a}}d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{II. b}$$

Denne Bestemmelsesmaade for $\psi(m, x-a)$ ved Hjælp af Formlen (β) vil, naar $m=\mu<1$, ifølge (δ), være ensbetydende med en Differentiation med Index

μ med Hensyn til x af den anden Ligning II, foretagen efter Formlen ((7)) med a som lavere Grændse.

Formlen $(\beta)'$ vilde kunne komme til Anvendelse ved Bestemmelsen af $\psi(m, x-a)$, hvis $\Psi(x-a)$ havde samme Form som høire Side af $(\beta)'$; men denne Form er meget speciel og falder ind under II. a.

Naar Functionen $G(\xi)$ i I ikke indeholder Led af Formen $\psi(-m, \xi-a)$, ville, ifølge Art. 1, Potensexponenterne i dens Rækkeudvikling efter Potenser af $(\xi-a)$ alle være $> m-1$, altsaa i hvert Fald > -1, saa at $\frac{d^{m+\mu} G(x)}{dx^{m'+\mu}} = \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \cdot \int_a^{(1-\mu)} G(x)\, dx^{1-\mu}$, ifølge de ved Formlen ((7)) gjorte Bemærkninger, ikke vil kunne indeholde Led af Complementet $\psi(m, x-a)$. Man vilde derfor i dette Tilfælde kunne anvende Formlen ((7)) ved Udførelsen af Differentiationen i II, naar man i Stedet for $F(x)$ satte $G(x)$ og saaledes kun differentierede de Led af $F(x)$, der ikke indeholde $\Psi(x-a)$. — I alle andre Tilfælde maa og **i alle Tilfælde kan** Differentiationen $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ i II udføres ved Hjælp af Formlerne (5), (9), eller (10), eller ved (8), naar i denne Formel ikkun (5), (9), eller (10) blive anvendte, idet der ved Anvendelsen af disse Formler aldrig kan indføres Led af Complementet $\psi(m, x-a)$. Det Samme gjælder om (5)'; men der vil ikke her kunne blive Brug for denne Formel. Er $F(x)$ umiddelbart givet som en Function af $(x-a)$, saa foretages Differentiationen med Hensyn til $(x-a)$, idet $\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m F(x)}{d(x-a)^m}$.

Det bør dog bemærkes, at, naar det ovenfor er sagt, at $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ i II ikkun bør beregnes paa den angivne Maade, saa er dette sket af Hensyn til en praktisk simpel Bestemmelsesmaade for $\psi(m, x - a)$. Theoretisk er der Intet til Hinder for, at $\frac{d^m F(x)}{dx^m}$ beregnes efter en hvilkensomhelst af de for denne Regningsart givne Formler, f. Ex. efter (7) med en hvilkensomhelst vilkaarlig valgt lavere Grændse c i Stedet for a; men Complementet i II bliver da $\psi_1(m, x)$, hvis Bestemmelse kan blive vanskelig, for ikke at sige umulig, naar der til Bestemmelsen af $f(x)$ ved I ikke er føiet særlige Betingelser, som kunne tjene til Complementets Bestemmelse.

Naar en Løsning af I skal være mulig, maa Betingelsen

$$lim \frac{F(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0 \qquad (\gamma)$$

være opfyldt.

En meget almindelig Form for I er

$$\gamma(m) \int_a^{(m)} f(\xi)\, d\xi^m =$$

$$\Sigma A_{r'}(\xi - a)^{n_{r'}} + l(\xi - a)\, \Sigma B_{r'}(\xi - a)^{q_{r'}} + (\xi - a)^{m-1}\, \Sigma K_{r'} e^{-\frac{p_{r'}}{\xi - a}} \qquad \text{I}'$$

hvori man, naar en Løsning skal være mulig, maa have $n_{r'} > m - 1$, $q_{r'} > m - 1$ og $p_{r'} > 0$. Naar denne Betingelse er opfyldt, faaes ved Anvendelse af Formlerne (5), 10 og II a

$$\left.\begin{aligned} \gamma(m) f(x) &= \Sigma A_{r'} \frac{\gamma(1 + n_{r'})}{\gamma(1 + n_{r'} - m)} (x - a)^{n_{r'} - m} \\ &+ \Sigma B_{r'} \frac{\gamma(1 + q_{r'})}{\gamma(1 + q - m)} (x-a)^{q_{r'}-m} \left(l(x-a) + \frac{\gamma'(1 + q_{r'})}{\gamma(1 + q_{r'})} - \frac{\gamma'(1 + q_{r'} - m)}{\gamma(1 + q_{r'} - m)} \right) \\ &+ (x - a)^{-m-1}\, \Sigma p_{r'}^m K_{r'} e^{-\frac{p_{r'}}{x - a}} \end{aligned}\right\} \text{II}'$$

Jeg har i I' fremstillet $F(\xi)$ som givet umiddelbart som en Function af $(\xi - a)$. Dette er naturligvis ikke nødvendigt, ligesom det i Praxis heller ikke i Almindelighed vil være nødvendigt, at man udvikler $F(\xi)$ efter Potenser af $(\xi - a)$. En saadan Rækkeudvikling er hidtil kun tænkt udført for at lette Fremstillingen og Forstaaelsen. Hvis den havde været nødvendig for

Udførelsen, vilde jeg have valgt Betegnelserne $F(\xi - a)$ og $f(x-a)$ i Stedet for $F(\xi)$ og $f(x)$. Hvis saaledes $F(\xi)$ i I' havde været givet under en anden Form, idet man f. Ex. i Stedet for de 2 første Summer havde havt $\Sigma C_{r'} \xi^{n_{r'}} + l\xi \Sigma D_{r'} \xi^{q r'}$, vilde man, efterat have forvisset sig om, at Betingelsen (γ) var tilfredsstillet, have differentieret I' med Index m med Hensyn til ξ i Stedet for med Hensyn til $(\xi - a)$, hvorved man ifølge, § 10, vilde have faaet ganske det samme Resultat. Dog maae — ifølge Bemærkningen i § 10 til Sætningen $\dfrac{d^m f(x+a)}{dx^m} = \dfrac{d^m f(x+a)}{d(x+a)^m}$ — de Led af $F(\xi)$, hvis Potensexponenter ere positiv hele, eller 0, enten være eller bringes til at være Potenser af $(\xi - a)$ og ved Differentiationen med Index m efter (5), (9), eller (10) differentieres med Hensyn til $(\xi - a)$, da ellers φ i II ikke vil kunne bestemmes som foran anført. Ligeledes maa, naar Complementet φ i II skal kunne bestemmes paa den anførte Maade, den Del af $F(\xi)$, som er bleven betegnet ved $\Psi(\xi - a)$, søges bragt paa en af de foran anførte Former.

Ex. 1. Betragtes $y = (\xi - x)^{m-1} f(x)$ som Ligningen for en Curve med de retvinklede Coordinater x og y, saa udtrykker I, at $f(x)$ skal bestemmes saaledes, at Arealet, som begrænses af Curven, x Axen og Ordinaterne til $x = a$ og $x = \xi$, skal være = den bekjendte Function $F(\xi)$, eller at $\int_a^\xi y\,dx$ skal være $= F(\xi)$. Naar en Løsning skal være mulig, maa $lim \dfrac{F(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}}$ være $= 0$, saa at man f. Ex., naar $p > 0$, kunde have

$$F(\xi) = A(\xi - a)^{p+m-1}, \text{ som giver}$$

$$y = \frac{A}{\gamma(m)} \frac{\gamma(m+p)}{\gamma(p)} (\xi - x)^{m-1} (x-a)^{p-1}$$

Skal altsaa Curvens Ligning have Formen $y = (\xi - x)^{\frac{1}{2}} f(x)$, og Arealet $F(\xi)$ være $= A(\xi - a)^2$, saa bliver, idet $m = \frac{3}{2} = p$, og $\gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$y = \frac{A}{\gamma(\frac{3}{2})} \frac{\gamma(3)}{\gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{(\xi - x)(x - a)} = \frac{8}{\pi} A \sqrt{(\xi - x)(x - a)}$$

som er Ligningen for en Ellipse, hvis ene Axe falder i x Axen, og hvis Halvaxer ere $\alpha = \frac{1}{2}(\xi - a)$ og $\beta = \frac{4}{\pi} A(\xi - a)$. Indføres disse i Udtrykket for Arealet, faaes

$$F(\xi) = A(\xi - a)^2 = \tfrac{1}{2}\pi . \alpha\beta$$

Var A givet $= \frac{\pi}{8}$, vilde man faae en Cirkel.

Ex. 2. Man søger en Curve ($y = f(x)$), som opfylder følgende Betingelse:

Naar man betragter Fodpunktet ($x = \xi$, $y = 0$) af Ordinaten $f(\xi)$ som Toppunktet af en Parabel, hvis Ligning i Coordinanterne x og y', er $y' = \sqrt{2\xi(\xi - x)}$, og som altsaa har sin Axe sammenfaldende med x Axen og sin Parameter $= 2\xi$, og man derefter construerer en tredie Curve (Coordinater x og y''), hvori enhver Ordinat y'' opfylder Betingelsen

$$y'' = y . y' = f(x) . \sqrt{2\xi(\xi - x)},$$

saa skal Arealet, $\int_0^\xi y'' dx$, som indesluttes af denne tredie Curve og Coordinataxerne, for enhver Værdi ξ af x være $= H(\xi)$, idet H er en bekjendt Function.

Man skal altsaa have

$$\int_0^\xi f(x) . \sqrt{2\xi(\xi - x)}\, dx = H(\xi), \text{ eller}$$

$$\int_0^\xi (\xi - x)^{\frac{3}{2} - 1} f(x)\, dx = \gamma(\tfrac{3}{2}) \int_0^{(\frac{3}{2})} f(\xi)\, d\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H(\xi)}{\sqrt{\xi}},$$

som ved Differentiation med index $\frac{3}{2}$ giver

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{3}{2}} . \frac{H(x)}{\sqrt{x}}}{dx^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

idet Complementet $\psi(\frac{3}{2}, x)$ bestemmes efter de foran anførte Regler (II, II a, II b, II'). Naar en Løsning skal være mulig, maa man, ifølge (γ), have $lim\ \dfrac{H(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}\,.\,\varepsilon^{\frac{3}{2}}-1} = lim\ \dfrac{H(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$, saa at man f. Ex., naar $p > 0$, kunde have $H(\xi) = A\xi^{1+p}$, som giver $\dfrac{H(x)}{\sqrt{x}} = Ax^{p+\frac{1}{2}}$ og $y = f(x) = A\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \dfrac{\gamma(\frac{3}{2}+p)}{\gamma(p)}\ x^{p-1}$.

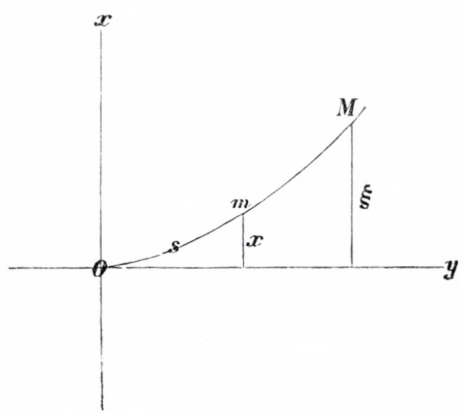
Skal $H(\xi)$ være $=$ det Halve af Kvadratet construeret paa ξ, bliver altsaa, idet $A = \frac{1}{2}$ og $p = 1$, Ligningen for den søgte Curve

$$y = \tfrac{1}{2}\,.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.\,\tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{8}\sqrt{2}$$

saa at Curven er en ret Linie parallel med x Axen. Havde man i Stedet for Betingelsen $y'' = y\,.\,y'$ havt $y'' = y\,.\,(y')^{2(m-1)}$, vilde m være traadt i Stedet for Index $\frac{3}{2}$.

Ex. 3. Fig. 1. At bestemme en Curve OM saaledes, at Tiden, som et materielt Punct, paavirket af Tyngden, behøver

Fig. 1.



for at bevæge sig fra M til O, bliver en given Function $H(\xi)$ af den lodrette Høide ξ af M over Horizontalplanet gjennem O.

I den lodrette Plan OM tages en vandret Linie gjennem O til y Axe. Et vilkaarligt Punct m paa Curven OM har Ordinaten x og Bue $Om = s$. Tyngdeaccelerationen g virker efter den negative Retning af x Axen, saa at ds har modsat Tegn af dt. Ligningen for Bevægelsen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g\,(\xi - x)$$

giver da Tiden for Faldet fra M til O

$$t = H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\xi (\xi - x)^{-\frac{1}{2}} \frac{ds}{dx}\, dx$$

Betegnes altsaa den ubekjendte Function $\frac{ds}{dx}$ ved $f(x)$, faaes

$$\int_0^\xi (\xi - x)^{\frac{1}{2} - 1} f(x)\, dx = \gamma(\tfrac{1}{2}) \int_0^{(\frac{1}{2})} f(\xi)\, d\xi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2g}\, H(\xi)$$

som, ved Differentiation med Index $\frac{1}{2}$, giver

$$\frac{ds}{dx} = f(x) = \frac{1}{\gamma(\frac{1}{2})} \left\{\frac{d^{\frac{1}{2}} \sqrt{2g}\, H(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}\right\} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \left\{\frac{d^{\frac{1}{2}} H(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Naar $f(x)$ skal kunne bestemmes herved, maa man, ifølge (γ), have $\lim \frac{H(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-1}} = \lim \sqrt{\varepsilon}\, H(\varepsilon) = 0$; men denne Betingelse er ikke her tilstrækkelig, thi, da $f(x)$ skal være $= \frac{ds}{dx}$, maa den fundne Værdi af x være numerisk $\geqq 1$. Naar denne Betingelse er opfyldt, er Curven fuldstændigt bestemt ved

$$s = \int_0^x f(x)\, dx \quad \text{og} \quad y = \int_0^x \sqrt{(f(x))^2 - 1}\, dx$$

$t = H(\xi) = \dfrac{e^{-\frac{1}{\xi}}}{\sqrt{\xi}}$ tilfredsstiller Betingelsen (γ) og giver, ifølge II', eller, ifølge (δ),

$$f(x) = \pm \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x}};$$ men, da denne Værdi af $f(x)$ ikke for enhver Værdi af x er numerisk $\geqq 1$, men giver $f(o) = 0$, kan den ikke bruges til Bestemmelsen af y.

Betingelsen $lim\, \sqrt{\varepsilon}\, H(\varepsilon) = 0$, vil, naar $p > 0$, f. Ex. være opfyldt ved $H(\xi) = A\xi^{p-\frac{1}{2}}$, som giver

$$f(x) = A\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{\gamma(p+\frac{1}{2})}{\gamma(p)} x^{p-1};$$ men, da $p > 1$ vilde give $f(o) = 0$, maa man have $p \leqq 1$. Sættes derfor $p = 1 - \alpha$, faaes

$$t = H(\xi) = A\xi^{\frac{1}{2}-\alpha}$$ at give

$$f(x) = \frac{ds}{dx} = A\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{\gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}{\gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \text{ og } s = A\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{\gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}{\gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha}$$

men, da $f(o)$ skal være numerisk $\geqq 1$, maa man, naar $\alpha = 0$, have $A^2 \geqq \frac{2}{g}$. Naar denne Betingelse er opfyldt, faaes $\alpha = 0$ at give

$$t = A\sqrt{\xi} \text{ og } s = A\sqrt{\tfrac{1}{2}g}\,.\,x, \quad y = \sqrt{\tfrac{1}{2}g\,A^2 - 1}\,.\,x$$

altsaa en ret Linie gjennem O.

For $\alpha = \frac{1}{2}$ faaes det tautochroniske Problem, eller

$$t = A, \text{ som giver } f(x) = \frac{A\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ og } s = A\frac{2\sqrt{2g}}{\pi}\sqrt{x}$$

altsaa en Cykloide med horizontal Grundlinie og Toppunkt i Begyndelsespunktet 0, idet man for denne Curve har $s = 2\sqrt{2a}\sqrt{x}$, naar a er den rullende Cirkels Radius. Udtrykt ved a bliver da Tiden for Faldet $t = A = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, og, betegnes Cykloidens halve Længde ved S, faaes $t = A = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{S}{g}}$, som er bekjendt.

$$t = H(\xi) = A\sqrt{\xi}(1 - l\xi)$$ vilde give

$$\frac{ds}{dx} = A\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot \frac{\gamma(\frac{3}{2})}{\gamma(1)}\left\{1 - \left(lx + \frac{\gamma'(\frac{3}{2})}{\gamma(\frac{3}{2})} - \gamma'(1)\right)\right\},$$ eller, ifølge (s) i § 8,

$$\frac{ds}{dx} = -\tfrac{1}{2} A\sqrt{2g}\left(lx + 1 + \frac{\gamma'(\frac{1}{2})}{\gamma(\frac{1}{2})} - \gamma'(1)\right)$$ og

$$s = -\tfrac{1}{2} A\sqrt{2g} \cdot x \cdot \left(lx + \frac{\gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \gamma'(1)\right).$$

$t = H(\xi) = Al\xi$ giver $s = 2A\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\sqrt{x}\left(lx + \gamma'(1) - \frac{\gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - 2\right)$

Art. 3. **Bestemmelse af Functionen φ i Ligningen**

$$\int_{\pm\infty}^{\xi}(\xi - x)^{m-1}\varphi(x)\,dx = H(\xi)$$

hvori $m > 0$ og H en bekjendt Function.

Da (6) ikke er gjældende for $a = \pm\infty$, maa det ovenstaaende Integral (som er $= \Gamma(m)\dfrac{\partial^{-m}\varphi(\xi)}{\partial\xi^{-m}}$, naar ∂ betyder en Liouvillesk Differentiation) først transformeres ved en Substitution, der kan bringe Ligningen paa Formen I. Dette sker meget simpelt ved at sætte $x = \dfrac{1}{z}$ og $\xi = \dfrac{1}{\zeta}$, som giver

$$\int_{\pm\infty}^{\xi}(\xi - x)^{m-1}\varphi(x)\,dx = \frac{(-1)^m}{\zeta^{m-1}}\int_0^{\zeta}(\zeta - z)^{m-1}\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{m+1}}\,dz$$

$$= \frac{(-1)^m\gamma(m)}{\zeta^{m-1}}\int_0^{(m)}\frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}}\,d\zeta^m$$

og altsaa

$$\gamma(m)\int_0^{(m)}\frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}}\,d\zeta^m = \frac{\zeta^{m-1}H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{(-1)^m}$$

hvorved Ligningen er bragt paa Formen I, idet a har faaet den specielle Værdi 0, $\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}}$ er traadt i Stedet for $f(\zeta)$ og $\dfrac{\zeta^{m-1}H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{(-1)^m}$ i Stedet for $F(\zeta)$. Det Liouvilleske Integral af Ordenen m er saaledes ved Transformation bragt paa en speciel Form af $\int_a^{(m)} f(\zeta)\, d\zeta^m$, og hermed er det i Grunden bevist, at der ikke vil kunne gives noget Problem af denne Art, der kan løses ved Liouvilles Methode, men ikke ved min.

Naar man differentierer den sidste Ligning med Index m og derpaa i Stedet for ζ sætter $\dfrac{1}{x}$, faaer man

$$x^{m+1}\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^m \gamma(m)} \left\{ \frac{d^m \, . \, \zeta^{m-1} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^m} \right\}_{\zeta=\frac{1}{x}}$$

idet der ved Parenthesen $\Big\{ \quad \Big\}_{\zeta=\frac{1}{x}}$ er antydet, at man efter den fuldstændige Differentiation med Hensyn til ζ har sat $\zeta = \dfrac{1}{x}$. Det tilhørende Complement $\psi(m, \zeta) = \psi\left(m, \dfrac{1}{x}\right)$ bestemmes efter de i Art. 2 givne Regler. Naar en Løsning skal være mulig, maa man, ifølge (γ), idet a er $= 0$, have

$$\frac{\zeta^{m-1} H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m-1}} = H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0 \text{ for } \zeta = 0,$$

$$\text{eller } H(\xi) = 0 \text{ for } \xi = \infty,$$

saa at man f. Ex., naar $p > 0$, kunde have $H(\xi) = \dfrac{A}{\xi^p}$, som vilde give

$$\varphi(x) = \frac{A x^{-m-1}}{(-1)^m \gamma(m)} \left\{ \frac{d^m \, . \, \zeta^{m+p-1}}{d\zeta^m} \right\}_{\zeta=\frac{1}{x}} = \frac{A}{(-1)^m} \frac{\gamma(m+p)}{\gamma(m) . \gamma(p)} \frac{1}{x^{m+p}}.$$

Ex. Man søger en Curve $(y = \varphi(x))$, som opfylder følgende Betingelse:

Naar man betragter Fodpunktet $(x = \xi, \ y = 0)$ af Ordinaten $\varphi(\xi)$ som Toppunktet af en Parabel, hvis Ligning i Coordinaterne

x og y' er $y' = \sqrt{2\xi(x-\xi)}$, og som altsaa har sin Axe sammenfaldende med x Axen og sin Parameter $= 2\xi$, og man derefter construerer en tredie Curve (Coordinater x og y''), hvori enhver Ordinat y'' opfylder Betingelsen

$$y'' = y \,.\, y' = \varphi(x) \,.\, \sqrt{2\xi(x-\xi)},$$

saa skal det, i Retning af x Axen uendelige, Areal $\int_\xi^\infty y'' dx$, som indesluttes af denne tredie Curve og x Axen, for enhver Værdi ξ af x være $= H(\xi)$, idet H er en bekjendt Function

Man skal altsaa have

$$\int_\xi^\infty \varphi(x) \,.\, \sqrt{2\xi(x-\xi)} \,.\, dx = H(\xi)$$

eller, ved Multiplication med $-\frac{\sqrt{-1}}{2\xi}$,

$$\int_\infty^\xi (\xi - x)^{\frac{3}{2}-1} \varphi(x)\, dx = -\sqrt{-1}\, \frac{H(\xi)}{\sqrt{2\xi}},$$

som ved $x = \frac{1}{z}$ og $\xi = \frac{1}{\zeta}$ forandres til

$$\frac{(-1)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \gamma^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\zeta^{\frac{3}{2}-1}} \int_0^{\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{3}{2}-1}}\, d\zeta^{\frac{3}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\, \zeta^{\frac{1}{2}}\, H\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Naar denne Ligning multipliceres med $2\,\frac{\zeta^{\frac{3}{2}-1}}{(-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}$ og derpaa differentieres med Index $\frac{3}{2}$, faaer man, ved i Stedet for ζ at sætte $\frac{1}{x}$,

$$x^{\frac{5}{2}}\, \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{d^{\frac{3}{2}} \,.\, \zeta H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{\frac{3}{2}}} \right\}_{\zeta = \frac{1}{x}}$$

men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have $\frac{\zeta H\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{3}{2}-1}} = \sqrt{\zeta}\,.\, H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0$ for $\zeta = 0$, eller $\frac{H(\xi)}{\sqrt{\xi}} = 0$ for $\xi = \infty$.

Man kunde altsaa f. Ex., naar $p > 0$, have $H(\xi) = k\xi^{\frac{1}{2}-p}$, som vilde give $\zeta H\left(\frac{1}{\zeta}\right) = k \,.\, \zeta^{p+\frac{1}{2}}$ og $y = \varphi(x) = k\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\gamma(\frac{3}{2}+p)}{\gamma(p)} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}+p}}$

Skal Arealet $H(\xi)$ forblive constant $= k$ for enhver Værdi af ξ, saa faaes, idet $p = \frac{1}{2}$, Curvens Ligning

$$y = \varphi(x) = k\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Havde man i Stedet for Betingelsen $y'' = y \,.\, y'$ havt $y'' = y \,.\, (y')^{2(m-1)}$, vilde Løsningen have været ligesaa simpel, idet m vilde være traadt i Stedet for Index $\frac{3}{2}$.

Art. 4. **Bestemmelsen af Functioner, forekommende i bestemte Integraler, der ere givne som bekjendte Functioner af Integralernes Invariable.**

Ligesom i Art. 3 maa dette Problem ved Substitution — enten for de Variable, eller for Functionen, eller ved begge Operationer i Forening, søges bragt paa Formen I.

Det vil ikke være muligt at angive nogen Hovedform for alle de bestemte Integraler, der ved Substitution kunne bringes paa Formen

$$\int_a^\zeta (\zeta - z)^{m-1} f(z)\, d(z) = \gamma(m) \int_a^{(m)} f(\zeta)\, d\zeta^m \,, \quad (m > 0);$$

men de følgende Formler (A) — (G), i hvilke overalt m er > 0, ville indeholde Exempler paa mere almindelige Former af saadanne bestemte Integraler, som kunne antages at ville kunne komme til Anvendelse.

Formlen ((6)) og simple Transformationer deraf give da først

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_a^{\xi} (\xi - x)^{m-1} f(x)\, dx = \\
&\int_0^{\xi - a} x^{m-1} f(\xi - x)\, dx = \gamma(m) \int_a^{(m)} f(\xi)\, d\xi^m \\
&\int_0^{a-\xi} x^{m-1} f(\xi + x)\, dx = \frac{\gamma(m)}{(-1)^m} \int_a^{(m)} f(\xi)\, d\xi^m \\
&\int_{\frac{a}{\xi}}^{1} (1 - x)^{m-1} f(\xi x)\, dx = \frac{\gamma(m)}{\xi^m} \int_a^{(m)} f(\xi)\, d\xi^m
\end{aligned}\right\} \qquad (A)
$$

Naar $a = \pm \infty$, forandres den sidste Formel til

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{\pm\infty}^{1} (1 - x)^{m-1} \varphi(\xi x)\, dx = (-1)^m \gamma(m)\,.\,\zeta\,. \int_0^{(m)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{m+1}}\, d\zeta^m \\
&\qquad\qquad \xi = \frac{1}{\zeta}
\end{aligned}\right\} \qquad (B)
$$

De andre for $a = \pm \infty$ til Formlerne (A) svarende Formler saavelsom selve den første Formel (A), ɔ: $((6))$, ville være specielle Former af de følgende mere almindelige Formler (C), $(C)'$ og (D).

Naar c^n ikke er uendelig, men c og n iøvrigt hvilkesomhelst Tal, faaer man, ned at sætte $x^n = z$ og $\xi^n = \zeta$, Formlen

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_c^{\xi} (\xi^n - x^n)^{m-1} \varphi(x)\, dx = \frac{\gamma(m)}{n} \int_{c^n}^{(m)} \zeta^{\frac{1}{n} - 1} \varphi\left(\zeta^{\frac{1}{n}}\right) d\zeta^m \\
&\qquad\qquad \xi = \zeta^{\frac{1}{n}} \text{ og } c^n \text{ ikke uendelig}
\end{aligned}\right\} \qquad (C)
$$

Naar c^{-n} ikke er uendelig, faaes paa samme Maade

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_c^{\xi} (\xi^n - x^n)^{m-1} \varphi(x)\, dx = \frac{(-1)^m \gamma(m)}{n \zeta^{m-1}} \int_{c^{-n}}^{(m)} \frac{\varphi\left(\zeta^{-\frac{1}{n}}\right)}{\zeta^{m+\frac{1}{n}}}\, d\zeta^m \\
&\qquad\qquad \xi = \zeta^{-\frac{1}{n}} \text{ og } c^{-n} \text{ ikke uendelig}
\end{aligned}\right\} \qquad (C)'
$$

Ved $n = 1$ og $c = a$ reduceres (C) til den første (A), ɔ: $((6))$, ligesom $(C)'$ ved $n = 1$ og $c = \pm\infty$ reduceres til det i Art. 3 behandlede Tilfælde $(a = \pm\infty)$

Sættes $\xi^p + kx^p = \frac{1}{z}$, $\xi^p = \frac{1}{\zeta}$, faaes, naar $p > 0$, den hyppigt anvendelige Formel

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty x^{m-1}\,\varphi(\xi^p + kx^p)\,dx = \frac{\gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{p\,.\,k^{\frac{m}{p}}\,.\,\zeta^{\frac{m}{p}-1}}\,.\int_0^{\left(\frac{m}{p}\right)} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{m}{p}+1}}\,d\zeta^{\frac{m}{p}} \\ \xi = \zeta^{-\frac{1}{p}},\ p > 0 \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

som for $p = 1$ og $k = -1$, for $p = 1$ og $k = +1$, giver de til den 2den og 3die Formel (A) svarende Formler for Tilfældet $a = \pm\infty$.

De foranstaaende Formler kunne let ved Substitution, anvendt enten paa Functionen, eller paa de Variable, eller saavel paa Functionen som paa de Variable, transformeres til en Mængde af Integraler, som kunne forekomme i Anvendelserne. Paa saadanne Transformationer skulle her ikkun anføres et Par Exempler.

Naar man i Formlen (B) sætter $x = \frac{1}{sin\ ^2\theta}$, $\xi = r^2$ og forandrer $\varphi(t)$ til $\frac{\varphi(\sqrt{t})}{t}$, faaer man

$$\left.\begin{aligned} \int_{\pm s'\pi}^{\pm t'\pi + \frac{\pi}{2}} cot^{2m-1}\,\theta\,.\,\varphi\left(\frac{r}{sin\,\theta}\right)\,d\theta = \frac{\gamma(m)}{2}\int_0^{(m)} \frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{\zeta^m}\,d\zeta^m \\ r = \sqrt{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Sættes heri atter $\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ i Stedet for $\varphi(t)$ og $\frac{1}{r}$ i Stedet for r, faaes

$$\left.\int_{\pm s'\pi}^{\pm t'\pi+\frac{\pi}{2}} cot^{2m-1}\,\theta\,.\,\varphi(r\,sin\,\theta)\,d\theta = \frac{\gamma(m)}{2}\int_{0}^{(m)}\frac{\varphi(\sqrt{\zeta})}{\zeta^m}\,d\zeta^m\right\}_{r=\sqrt{\zeta}} \qquad (F)$$

Ved i den sidste Formel (A) at sætte $a = c^2$, $\xi = r^2$, $x = sin^2\theta$ og $f(t) = \frac{\varphi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ faaer man

$$\left.\int_{arc\left(sin = \pm\frac{c}{r}\right)}^{\pm t'\pi+\frac{\pi}{2}} cos^{2m-1}\,\theta\,.\,\varphi(r\,sin\,\theta)\,d\theta = \frac{\gamma(m)}{2\,\zeta^{m-\frac{1}{2}}}\int_{c^2}^{(m)}\frac{\varphi(\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}}\,d\zeta^m\right\}_{r=\sqrt{\zeta}} \qquad (G)$$

som for $m = \frac{1}{2}$ antager en meget simpel og hyppigt anvendelig Form. For $m = \frac{1}{2}$ og $c = 0$ falde de to sidste Formler sammen i een.

De foran anførte Formler, saavelsom andre deraf dannede, kunne selvfølgelig ogsaa komme til Anvendelse, naar de Ligninger, der skulle tjene til Bestemmelsen af de ubekjendte Functioner, ere af en mindre simpel Form end den hidtil forudsatte; men det Foranstaaende vil i alle Tilfælde give en tilstrækkelig Veiledning med Hensyn til Formlernes Benyttelse. Saadanne mere complicerede, men desuagtet yderst simple, Anvendelser ville findes i det følgende Ex. 3, saavelsom i Art. 5.

Naar Problemet har den hidtil forudsatte simple Form, bliver Reglen for Formlernes Anvendelse denne:

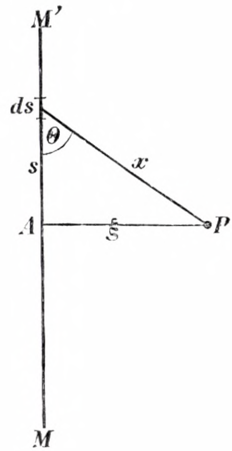
Den givne Function af ξ (eller r) forandres ved den under Formlerne anførte Substitution til en Function af ζ, og Problemet kan da bringes paa Formen I:

$$\gamma(m)\int_{a}^{(m)} f(\zeta)\,d\zeta^m = F(\zeta), \text{ som giver } f(\zeta) = \frac{1}{\gamma(m)}\left\{\frac{d^m\,F(\zeta)}{d\zeta^m}\right\},$$

idet Differentiationen og Bestemmelsen af Complementet $\psi(m,\ \zeta - a)$ ske efter de i Art. 2 anførte Regler. Naar en Løsning skal være mulig, maa man have $lim \frac{F(a+\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}} = 0.$

Ex. 1. Fig. 2. Elementet ds af den uendelige rette Linie MM'

Fig. 2.



udøver paa Punktet P, i Afstanden $PA = \xi$ fra MM', en Tiltrækning

$$\varphi(x)\, sin\, \theta\, .\, ds = \varphi(x)\, .\, \frac{\xi}{x}\, .\, d\sqrt{x^2 - \xi^2} = \xi\, (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}\, \varphi(x)\, dx,$$

idet x er Elementets Afstand fra P, og θ den Vinkel, som x danner med ds, eller med s, der regnes fra A. Denne Tiltrækning staaer lodret paa Planet PMM', og Summen af alle disse Tiltrækninger, eller Resultanten af hele Liniens Tiltrækning antages at være en given Function $H(\xi)$ af Afstanden $PA = \xi$. Man skal da finde φ af

$$2\int_{\xi}^{\infty} \xi\,(x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}\, \varphi(x)\, dx = H(\xi)$$

Integralet heri bringes paa Formen $(C)'$, naar Ligningen multipliceres med $-\frac{1}{2\xi\sqrt{-1}}$, og man faaer da, ifølge $(C)'$, idet $n=2$, $m=\frac{1}{2}$ og $c=\infty$,

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}}\gamma(\frac{1}{2})}{2\zeta^{-\frac{1}{2}}}\int_0^{(\frac{1}{2})}\frac{\varphi(\zeta^{-\frac{1}{2}})}{\zeta}d\zeta^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{H(\zeta^{-\frac{1}{2}})}{\zeta^{-\frac{1}{2}}}$$

Naar denne Ligning divideres med $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}}\gamma(\frac{1}{2})}{2\zeta^{-\frac{1}{2}}}$ og derpaa differentieres med Index $\frac{1}{2}$, faaer man, ved efter Differentiationen at sætte $\frac{1}{x^2}$ i Stedet for ζ,

$$x^2\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{d^{\frac{1}{2}}.H(\zeta^{-\frac{1}{2}})}{d\zeta^{\frac{1}{2}}}\right\}_{\zeta=\frac{1}{x^2}}$$

hvorved φ er bestemt; men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have $\frac{H(\zeta^{-\frac{1}{2}})}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}}=\sqrt{\zeta}\,.\,H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)=0$ for $\zeta=0$, eller $\frac{H(\xi)}{\zeta}=0$ for $\xi=\infty$.

Man kunde derfor, naar $p>0$, f. Ex. have $H(\xi)=i\,.\,\xi^{1-p}$, som, idet $H(\zeta^{-\frac{1}{2}})$ bliver $=i\,\zeta^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}$, giver

$$\varphi(x)=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\frac{\gamma(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2})}{\gamma(\frac{1}{2}p)}\cdot\frac{1}{x^p}$$

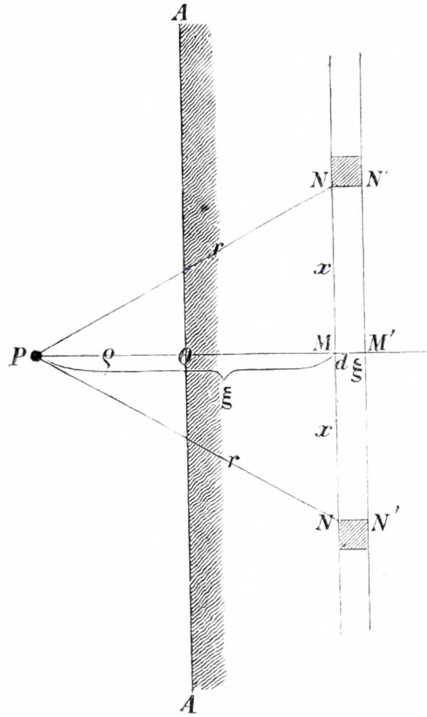
For Virkningen af en Magnetpol paa en elektrisk Strøm haves $H(\xi)=\frac{i}{\xi}$, altsaa $p=2$, og

$$\varphi(x)=\frac{i}{2x^2}$$

Ex. 2. Fig. 3. Rummet til Høire for Planet AOA er fyldt med en Masse, hvis Dimensioner kunne betragtes som uendelige. Forsøg have vist, at et materielt Punkt P i Afstanden $PO=\rho$ fra Begrænsningsplanet bliver tiltrukket (frastødt) med en Kraft $=F(\rho)$. Tætheden af Massen er overalt

$= kx^{\nu}$, idet x er Afstanden fra et Punkt N i Massen til Perpendikulæren POM fra P paa Planet AOA. Der spørges om Tiltrækningen (eller Frastødningen) $\varphi(r)$ mellem P og en Masse-

Fig. 3.



enhed N i Afstanden r fra P, idet Tiltrækningen (Frastødningen) overalt foregaaer i Retning af Afstanden mellem Masserne og er proportional med disse.

Igjennem N lægges et Plan $NMN \perp POM$. Omkring M som Centrum med $MN = x$ som Radius beskrives i Planet en Cirkel, der betragtes som Basis for en Cylinder, hvis Axe falder i POM, og hvis Høide er $MM' = NN' = d\xi$. Udenom denne Cylinderflade føres en anden med Radius $(x + dx)$ og med samme Axe og samme Høide $d\xi$. Alle Punkter i den mellem de to Cylinderflader beliggende Ring ville have samme Tæthed

kx^n og samme Afstand r fra P. Da Ringens Volumen er $= 2\pi x \,.\, d\xi \,.\, dx$, bliver Summen af Tiltrækningerne af alle Masse-elementerne i Ringen $= 2\pi k \,.\, \varphi(r) \,.\, x^{n+1} \,.\, d\xi \,.\, dx$, og altsaa Composanten deraf, parallel med POM,

$= 2\pi k \,.\, \frac{\xi}{r} \,.\, \varphi(r) \,.\, x^{n+1} \,.\, d\xi \,.\, dx$, idet $PM = \xi$. Virkningen af den hele Masse er altsaa

$$2\pi k \int_\rho^\infty \xi \, d\xi \int_0^\infty \frac{\varphi(r)}{r} x^{n+1} \, dx = F(\rho)$$

som, naar man sætter

$$\int^\infty x^{n+1} \frac{\varphi(r)}{r} \, dx = \int_0^\infty x^{n+1} \frac{\varphi\left(\sqrt{\xi^2 + x^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} \, dx = f(\xi),$$

faaer Formen

$$2\pi k \int_\rho^\infty \xi f(\xi) \, d\xi = F(\rho)$$

Ved Differentiation af denne Ligning med Hensyn til ρ bliver $f(\rho)$ bestemt, og, naar man derpaa indsætter $f(\xi)$ i den næst-sidste Ligning, faaer man

$$\int_0^\infty x^{n+1} \frac{\varphi\left(\sqrt{\xi^2 + x^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} \, dx = -\frac{F'(\xi)}{2\pi k \xi}$$

Naar n er > -2, vil Integralet heri være af Formen (D), som, idet $m = n + 2$, $p = 2$ og $k = 1$, giver

$$\int_0^\infty x^{n+1} \frac{\varphi\left(\sqrt{\xi^2 + x^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 + x^2}} dx = \int_0^\infty x^{n+1} \varphi_1(\xi^2 + x^2) \, dx =$$

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{2\zeta^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{2+\frac{n}{2}}} \, d\zeta^{1+\frac{n}{2}} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{2\zeta^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} \frac{\varphi\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right)}{\zeta^{\frac{n+3}{2}}} \, d\zeta^{1+\frac{n}{2}}$$

$$= -\frac{\zeta^{\frac{1}{2}}}{2\pi k} F'\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Naar man multiplicerer denne sidste Ligning med $\frac{2\zeta^{\frac{n}{2}}}{\gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$, differentierer med Index $\left(1+\frac{n}{2}\right)$ og derpaa forandrer ζ til $\frac{1}{r^2}$, faaer man

$$r^{n+3}\varphi(r) = -\frac{1}{\pi k \,.\, \gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\left\{\frac{d^{1+\frac{n}{2}}\,\zeta^{\frac{n+1}{2}}F'\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right)}{d\zeta^{1+\frac{n}{2}}}\right\}_{\zeta=\frac{1}{r^2}}$$

hvorved $\varphi(r)$ er bestemt; men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have

$$\frac{\zeta^{\frac{n+1}{2}}F'\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right)}{\zeta^{1+\frac{n}{2}-1}} = \zeta^{\frac{1}{2}}F'\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \text{ for } \zeta = 0, \text{ eller}$$

$$\frac{F'(\rho)}{\rho} = 0 \text{ for } \rho = \infty.$$

Man kunde altsaa f. Ex., naar $p > 0$, have

$$F(\rho) = \frac{A}{\rho^{p-2}} + C, \text{ som giver}$$

$$\varphi(r) = \frac{p-2}{\pi k}\,\frac{\gamma\left(1+\frac{n}{2}+\frac{p}{2}\right)}{\gamma\left(1+\frac{n}{2}\right).\gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\,\frac{A}{r^{1+n+p}}$$

Havde man givet $F(\rho) = A \,.\, l\rho + C$, vilde man faae

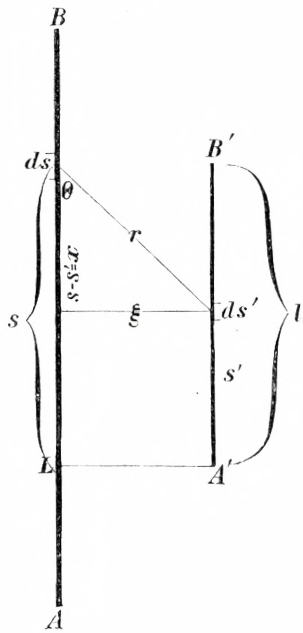
$$\varphi(r) = -\frac{1+\frac{n}{2}}{\pi k}\,\frac{A}{r^{n+3}}$$

Ex. 3. Fig. 4. De forskjellige Elementer ds af en uendelig ret Linie AB udøve paa Elementerne ds' af en endelig ret Linie $A'B'$, som er $\neq AB$ og har en Længde $A'B' = l$, en Virkning, hvis Retning gaaer efter r (Afstanden meliem ds og ds'), og som er =

$$\varphi(r)\,.\left(1+(k-1)\cos^2\theta\right) ds \,.\, ds',$$

idet θ er Vinklen mellem r og de 2 parallele rette Linier. Til Bestemmelsen af den ubekjendte Function φ tjener, at Resultanten af alle disse Virkninger kan udtrykkes ved $\frac{i\,.\,l}{\xi}$, idet i er en Constant og ξ Afstanden mellem AB og $A'B'$.

Fig. 4.



Da Resultanten er Summen af de enkelte Virkningers Composanter, perpendiculære paa de 2 parallele Linier, maa man altsaa have

$$\int_0^l ds' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r)\,.\,(1+(k-1)\cos^2\theta)\sin\theta\,.\,ds = \frac{i\,.\,l}{\xi}$$

Sættes $s - s' = x$, $ds = dx$, haves ifølge Figuren

$$r = \sqrt{\xi^2 + x^2},\ \cos^2\theta = \frac{x^2}{\xi^2 + x^2},\ \sin\theta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + x^2}}$$

som, indsatte i ovenstaaende Ligning, give — efterat Integrationen med Hensyn til s' er bleven udført —

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2+x^2})}{\sqrt{\xi^2+x^2}}\,dx + (k-1)\int_0^\infty x^2\frac{\varphi(\sqrt{\xi^2+x^2})}{(\xi^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{i}{2\xi^2}$$

De heri forekommende Integraler ere af Formen (D), som, naar man sætter

$$\frac{\varphi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \varphi_1(t) \text{ og } \frac{\varphi(\sqrt{t})}{t^{\frac{3}{2}}} = \varphi_2(t) \text{ giver}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(\xi^2+x^2)\,dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\zeta^{-\frac{1}{2}}}\int_0^{(\frac{1}{2})}\frac{\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{3}{2}}}\,d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\zeta}\int_0^{(\frac{1}{2})}\frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{\zeta}\,d\zeta^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{og} \int_0^\infty x^2\varphi_2(\xi^2+x^2)\,dx = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2\zeta^{\frac{1}{2}}}\int_0^{(\frac{3}{2})}\frac{\varphi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^{\frac{5}{2}}}\,d\zeta^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\zeta}}\int_0^{(\frac{3}{2})}\frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{\zeta}\,d\zeta^{\frac{3}{2}}$$

idet $\xi = \zeta^{-\frac{1}{2}}$. Naar disse Udtryk indføres i den ovenstaaende Ligning, og denne derpaa multipliceres med $\frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\zeta}}$, faaes, idet $\frac{i}{2\xi^2} = \frac{i}{2}\zeta$,

$$\int_0^{(\frac{1}{2})}\frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)d\zeta^{\frac{1}{2}} + \frac{k-1}{2\zeta}\int_0^{(\frac{3}{2})}\frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)d\zeta^{\frac{3}{2}} = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\zeta^{\frac{1}{2}}$$

som, naar man sætter $\int_0^{(\frac{3}{2})}\frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)d\zeta^{\frac{3}{2}} = u$, reduceres til

$$\frac{du}{d\zeta} + \frac{k-1}{2\zeta}\,u = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\zeta^{\frac{1}{2}}$$

der ved Integration giver

$$u = \int_0^{(\frac{3}{2})}\frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)d\zeta^{\frac{3}{2}} = \frac{2i}{(k+2)\sqrt{\pi}}\zeta^{\frac{3}{2}} + C\zeta^{\frac{1-k}{2}}$$

Ved Differentiation med Index $\frac{3}{2}$ erholdes da endelig heraf

$$\frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = r^2\,\varphi(r) = \left\{\frac{d^{\frac{3}{2}}}{d\,\zeta^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{2\,i}{(k+2)\sqrt{\pi}}\,\zeta^{\frac{3}{2}} + C\zeta^{\frac{1-k}{2}}\right)\right\}_{\zeta=\frac{1}{r^2}}$$

men, naar en Løsning skal være mulig, maa man, ifølge (γ), have $lim\left(\frac{2\,i}{(k+2)\sqrt{\pi}}\,\varepsilon + C\,.\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}k}\right) = C\,.\,lim\,.\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}k} = 0$, saa at man, naar k er >0, maa tage $C=0$. Man vil derfor ved at udføre Differentiationen med Index $\frac{3}{2}$ og sætte

$$C\frac{\gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}k)}{\gamma(-\frac{1}{2}k)} = K,$$

for $k>0$ erholde $\varphi(r) = \frac{3\,i}{2\,(k+2)}\cdot\frac{1}{r^2}$

og for $k<0$ erholde $\varphi(r) = \frac{3\,i}{2\,(k+2)}\cdot\frac{1}{r^2} + K\,.\,\frac{1}{r^{-k}}$

hvori K er en arbitrær Constant.

Ex. 4. Fig. 4. De materielle Elementer ds af den uendelige rette Linie AB udøve paa Elementerne ds' af den materielle, med AB parallele, rette Linie $A'B'$, hvis Længde er $=l$, en Tiltrækning (Frastødning), som foregaaer i Retningen af og afhænger af Afstanden r mellem Elementerne ds og ds' og er proportional med disses Masser. Tætheden i AB er $=1$ og i $A'B'=F(s')$, idet F er en bekjendt Function. Tiltrækningen mellem ds og ds' er altsaa $=\varphi(r)\,.\,ds\,.\,F(s')\,ds'$. — Hvorledes bestemmes φ, naar Iagttagelser have givet, at den indbyrdes Paavirkning af de to rette Linier AB og $A'B'$ er $= H(\xi)\,.\int_0^l F(s')\,ds'$, idet $H(\xi)$ er en bekjendt Function af Liniernes indbyrdes Afstand ξ, og $\int_0^l F(s')\,ds'$ er Massen af Linien $A'B'$?

Man faaer

$$2\int_0^l F(s')\,ds'\,.\int_0^\infty \xi\frac{\varphi(r)}{r}\,ds = H(\xi)\,.\int_0^l F(s')\,ds',\ \text{eller}$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2+x^2})}{\sqrt{\xi^2+x^2}}\,dx = \frac{H(\xi)}{2\xi}$$, som, ifølge Formlen (D), giver

$$\frac{\gamma(\frac{1}{2})}{2}\,\zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) d\zeta^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,\zeta^{\frac{1}{2}}\,H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)$$

hvoraf man ved Multiplication med $\frac{2}{\gamma(\frac{1}{2})}\,\zeta^{-\frac{1}{2}}$ og Differentiation med Index $\frac{1}{2}$ faaer

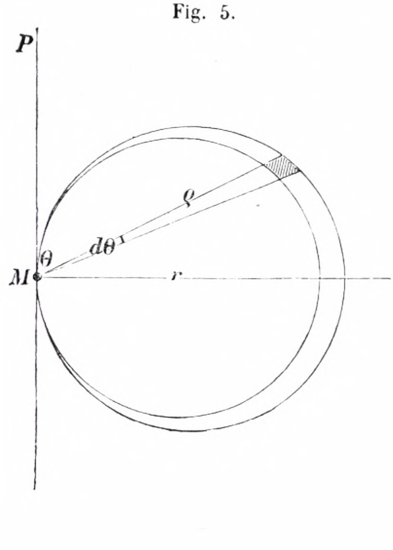
$$\frac{1}{\zeta}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = r^2\,\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{d^{\frac{1}{2}}\,.\,H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{d\zeta^{\frac{1}{2}}}\right\}_{\zeta=\frac{1}{r^2}}$$

Herved er $\varphi(r)$ bestemt, idet man dog maa have $\frac{H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right)}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}} = \sqrt{\zeta}\,.\,H\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = 0$ for $\zeta = 0$, eller $\frac{H(\xi)}{\xi} = 0$ for $\xi = \infty$. Man kunde derfor f. Ex., naar $p > 0$, have

$$H(\xi) = A\xi^{1-p}, \text{ som vilde give } \varphi(r) = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\cdot\frac{1}{r^p}$$

Ex. 5. Fig. 5. Efter hvilken Function $\varphi(\rho)$ af Afstanden ρ bliver et materielt Punkt M tiltrukket af Punkterne i et Plan,

Fig. 5.



naar det er givet, at Resultanten af Tiltrækningerne af alle de Punkter, der ligge indenfor en Cirkel, gaaende igjennem M, er en given Function $H(r)$ af Cirklens Diameter r.

Igjennem M drages en ret Linie MP og 2 Cirkler, der begge tangere MP i M. Naar disse Cirklers Diametre ere henholdsvis r og $(r + dr)$, vil det imellem de 2 Cirkelperipherier beliggende Areal paa Punktet M udøve en Tiltrækning

$$H(r + dr) - H(r) = H'(r) \,.\, dr$$

Naar M tages til Pol og MP til Polaxe, vil den første Cirkels Ligning være

$$\rho = r \; sin \, \theta$$

saa at Arealet af det uendeligt lille Fladeelement, som indesluttes af de 2 Cirkler og af 2 *radii vectores*, dragne henholdsvis under Vinklerne θ og $(\theta + d\theta)$ med MP, vil være

$$\rho \, d\theta \,.\, \frac{d\rho}{dr} dr = r \, sin \, \theta \, d\theta \,.\, sin \, \theta \, dr = r \, sin^2 \theta \,.\, d\theta \,.\, dr$$

Den Tiltrækning, som de indenfor dette Areal beliggende Punkter udøve paa M, vil altsaa være $= r \, sin^2 \theta \,.\, d\theta \,.\, dr \,.\, \varphi(\rho)$, og denne Tiltræknings Composant $\perp$ PM bliver

$$r \, sin^3 \theta \,.\, \varphi(r \, sin \, \theta) \,.\, d\theta \,.\, dr$$

Tiltrækningen af hele det imellem de 2 Cirkelperipherier beliggende Areal er altsaa

$$2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, sin^3 \theta \,.\, \varphi \, (r \, sin \, \theta) \,.\, d\theta = H'(r) \,.\, dr$$

Det heri forekommende Integral bringes paa Formen (G) hvori $m = \frac{1}{2}$ og $c = 0$, naar man multiplicerer Ligningen med $\frac{r^2}{2\, dr}$. Man faaer da ifølge (G)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin \theta)^3 . \varphi(r \sin \theta) . d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1 (r \sin \theta) d\theta =$$

$$\frac{\gamma(\frac{1}{2})}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{\varphi_1(\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}} d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{\gamma(\frac{1}{2})}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} \zeta\varphi(\sqrt{\zeta})\, d\zeta^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\zeta H'(\sqrt{\zeta})$$

Differentiation med Index $\frac{1}{2}$ giver derpaa

$$\zeta\varphi(\sqrt{\zeta}) = \rho^2\varphi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{\frac{d^{\frac{1}{2}} . \zeta H'(\sqrt{\zeta})}{d\zeta^{\frac{1}{2}}}\right\}_{\zeta=\rho^2}$$

hvorved $\varphi(\rho)$ er bestemt; men, naar en Løsning skal være mulig, maa man have $\frac{\zeta H'(\sqrt{\zeta})}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}} = \zeta^{\frac{3}{2}} H'(\sqrt{\zeta}) = 0$ for $\zeta = 0$, eller $r^3 H'(r) = 0$ for $r = 0$. Man kunde derfor, naar $p > 0$, have

$$H(r) = C + Ar^{p-2}, \text{ som giver}$$

$$\varphi(\rho) = A \frac{p-2}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \rho^{p-4}$$

Er $H(r) = Ar$, ɔ: Tiltrækningen proportional med Cirklens Diameter, bliver altsaa, idet $p = 3$,

$$\varphi(r) = \frac{2A}{\pi} . \frac{1}{\rho}$$

ɔ: omvendt proportional med Afstanden.

Er $H(r) = Ar^2$, ɔ: Tiltrækningen proportional med Cirklens Areal, bliver, idet $p = 4$,

$$\varphi(\rho) = \tfrac{3}{2} A$$

altsaa constant, uafhængig af r, hvilket kunde forudses.

Er $H(r) = B . lr + C$, bliver, idet $\zeta H'(\zeta) = B\zeta^{\frac{1}{2}}$,

$$\varphi(\rho) = \tfrac{1}{2} B . \frac{1}{\rho^2}$$

altsaa omvendt proportional med Afstandens Qvadrat.

Hvis man i Stedet for en hel Cirkel havde havt en af dennes Diameter afhængig Del af Cirklens Areal, indesluttet mellem de 2 *radii vectores* til $\theta = arc\left(sin = \frac{c}{r}\right)$ og $\theta = \pi - arc\left(sin = \frac{c}{r}\right)$, og Tiltrækningen af dette Areal var givet $= H(r)$, maatte det Integral, som udtrykker den halve Tiltræk-trækning Composant $\perp$ PM af Arealet mellem de 2 Cirkel-peripherier, have været taget mellem Grændserne $arc\left(sin = \frac{c}{r}\right)$ og $\frac{\pi}{2}$ i Stedet for mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, hvorved Formlen (G) med c^2 i Stedet for 0 vilde være kommen til Anvendelse. Betingelsen for Opgavens Løsning vilde da have været $lim \frac{(c^2 + \varepsilon) H'(\sqrt{c^2 + \varepsilon})}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-1}} = 0$, saa at man, naar $p > 0$, kunde have $r^2 H'(r) = A(r^2 - c^2)^{p-\frac{1}{2}}$, som vilde give $\varphi(\rho) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma(p + \frac{1}{2})}{\gamma(p)} \frac{(\rho^2 - c^2)^{p-1}}{\rho^2}$, idet Differentiationen med Index $\frac{1}{2}$ udføres med Hensyn til $(\zeta - c^2)$.

Art. 5. **Integration af lineære Differentialligninger af hvilkensomhelst (brudden) Orden. Anvendelser.**

I 1ste Hovedafsnits § 11 har jeg som et Exempel paa Integration af lineære Differentialligninger af brudden Orden behandlet den lineære Ligniug

$$\frac{d^m y}{dx^m} + a x^n y = 0 \qquad \text{III}$$

og fremstillet dens fuldstændige Integral.

Integrationen af III udførtes ved at sætte

$$y = x^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} x^{i'p}$$

og man fandt da det fuldstændige Integral at være

$$\left.\begin{aligned} y &= x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'}\, x^{-r'} . \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{A_{i'}}{C_{r'}}\, x^{i'(m+n)} \\ \text{idet} \quad & \\ A_{i'} &= -\, \frac{\gamma\,(i'm + i'n - r')}{\gamma\,((i'+1)\,m + i'\,n - r')}\, a A_{i'-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{III}'$$

og A_0, der forbliver arbitrær ved enhver Værdi af $r' = 0, 1, 2, \ldots \infty$, er betegnet ved $C_{r'}$

Er $m = -\,n$, faaer man

$$\left.\begin{aligned} & y = \Sigma\, C_q\, x^q \\ & \text{idet } q \text{ er Rod i Ligningen} \\ & \frac{\gamma\,(q+1)}{\gamma\,(q+1-m)} = \frac{\gamma\,(q+1)}{\gamma\,(q+1+n)} = -\,a \end{aligned}\right\} \quad \text{III}''$$

som for $m = \pm\, m'$ antager den simplere Form $\dfrac{«q»}{«q \mp m'»} = -\,a.$

Den Række, der fremstiller det fuldstændige Integral for $n \gtrless -\,m$, vil, naar m er positiv hel, $= m'$, antage en simplere Form, idet r' da ikkun faaer Værdierne $0, 1, 2, \ldots (m' - 1)$; men Rækken vil ogsaa ved specielle Værdier af n kunne antage en simplere Form, eller vel endog for specielle Værdier af r' kunne summeres under endelig Form. Man vil saaledes finde, at, naar $m = \frac{1}{2}$ og $n = -\,1$, bliver Rækken for $r' = 0$ reduceret til

$$y = C x^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{a^2}{x}}$$

som altsaa er et particulært Integral i

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{x}\, y = 0$$

Dette Resultat kunde man være kommet lettere til; thi Ligningen er en speciel Form af

$$\frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} = \frac{p^{\mu}}{(x-a)^{2\mu}}\, y \tag{ε}$$

som, ifølge (δ) i Art. 1, har det particulære Integral

$$y = C(x-a)^{\mu-1}\, e^{-\frac{p}{x-a}}; \quad (p > 0) \tag{ε'}$$

Ligeledes faaes af Formlen (β) et particulært Integral af

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^{-(m'+\mu)}y}{dx^{-(m'+\mu)}} = \frac{(x-a)^{2(m'+\mu)}}{p^{m'+\mu}}\,y \\ \text{at være}\quad & \\ &y = \frac{C}{(x-a)^{m'+\mu+1}}\,e^{-\frac{p}{x-a}};\ (p>0) \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

I Formlerne (ε) og (ζ) vil høire Side af Ligningen kunne have dobbelt Tegn ($\pm$), naar μ er en ægte Brøk med lige Nævner.

Mere almindeligt kan man af Ligningen

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{p^m}{(x-a)^{2m}}\,y$$

hvori m er et hvilketsomhelst positivt, eller negativt Tal, slutte, at et particulært Integral y maa kunne tænkes at have Formen $\phi(-m,\, x-a) = (x-a)^{m-1}\,\Sigma C_{r'}(x-a)^{-r'}$ med bestemte Værdier for Constanterne; thi $\frac{d^m y}{dx^m}$ maa da enten være $= 0$, eller alene indeholde Led af Complementet $\phi_1(m, a-x)$ $= (x-a)^{-m-1}\,\Sigma K_{r'}(x-a)^{-r'}$, medens $\frac{k}{(x-a)^{2m}}\,y =$ $p^m\,(x-a)^{-m-1}\,\Sigma C_{r'}(x-a)^{-r'}$ bliver af samme Form. Saaledes vil f. Ex. $m = 1$ give $y = Ce^{-\frac{p}{x-a}} = C(x-a)^{1-1}\,\Sigma\frac{(-k)^{r'}}{[r']}(x-a)^{-r'}$; $m = -1$ give $y = C(x-a)^{-1-1}e^{-\frac{p}{x-a}}$. Forøvrigt er det af Hr. Professor Steens Undersøgelser bekjendt, at Ligningen for m positiv hel, $= m'$, er fuldstændigt integreret ved

$$y = \sum_{s'=1}^{s'=m'} C_{s'}\,(x-a)^{m'-1}e^{-\frac{a_{s'}p}{x-a}}$$

idet $a_{s'}$ er een af de m' Rødder af Enheden.

Dette Resultat kan let udledes af den fundne fuldstændige Integration af III, som for $m = m'$ og $n = -2m'$ bliver

$$\frac{d^{m'}y}{dx^{m'}} = -\,a\,x^{-2m'}\,y \qquad (\eta)$$

Sættes $a = -p^{m'}$, altsaa $p = 1^{\frac{1}{m'}}\sqrt[m']{-a} = a_{s'}.\sqrt[m']{-a}$, faaes det almindelige particulære Integral

$$y = C_{r'}\, x^{m'-1} \sum_{i'=1}^{i'=\infty} \frac{A_{i'}}{C_{r'}} \frac{1}{x^{i'm'+r'}}, \text{ idet}$$

$$A_{i'} = \frac{\gamma(-(i'm'+r'))}{\gamma(-((i'-1)m'+r'))} p^{m'} A_{i'-1} = \frac{[(i'-1)m'+r']}{[i'm'+r']} (-p)^{m'} A_{i'-1},$$

hvoraf man finder

$$A_{i'} = \frac{(-p)^{i'm'}}{[i'm'+r']} [r']\, A_0 = \frac{(-p)^{i'm'+r'}}{[i'm'+r']} C_{r'}$$

saa at det almindelige particulære Integral bliver

$$y = C_{r'}\, x^{m'-1} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{1}{[i'm'+r']} \left(-\frac{p}{x}\right)^{i'm'+r'}, \text{ idet } r' = 0, 1, 2, \ldots (m'-1).$$

Heraf kan man danne et nyt particulært Integral ved at sætte $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{m'-1} = K_{s'}$ og summere disse m' Integraler. Derved faaes

$$y = K_{s'}\, x^{m'-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{1}{[r]'} \left(-\frac{p}{x}\right)^{r'} = K_{s'}\, x^{m'-1}\, e^{-\frac{a_{s'} \sqrt[m']{-a}}{x}}$$

og det fuldstændige Integral

$$y = x^{m'-1} \sum_{s'=1}^{s'=m'} K_{s'}\, e^{-\frac{a_{s'} \sqrt[m']{-a}}{x}} \qquad (\eta)'$$

hvori altsaa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m'}$ ere de m' Værdier af $1^{\frac{1}{m'}}$.

Naar $(m+n)$ i III er $= -p'$, (negativ hel), og m **ikke** $= m' \leqq p' + r'$, giver III' $A_{i'} = \pm \infty$; men man vil da kunne forandre Fortegnet for $(m+n)$ og m ved at sætte $\dfrac{d^m y}{dx^m} = z$ og $y = \left\{\dfrac{d^{-m} z}{dx^{-m}}\right\}$.

Naar $(m+n) = p'$, ɔ: positiv hel, vil III' ikkun kunne give p' particulære Integraler, svarende til $r' = 0, 1, 2, \ldots (p'-1)$; thi $r' \geqq p'$ vilde give $A_1 = \pm \infty$. Man vil dog i dette Tilfælde let af III' kunne slutte sig til en almindeligere Form for Integralet, hvorved der til enhver af de p' Værdier $0, 1, 2, \ldots (p'-1)$ af r' vil svare et particulært Integral med 2 arbitrære Constanter $C_{r'}$ og $C'_{r'}$, saa at Summen af disse p' particulære Integraler giver et Integral med $2p'$ arbitrære Constanter. Sættes nemlig i III, der antager Formen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^m y}{dx^m} + a x^{-m+p'} y = 0, \\ &y = x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=p'-1} x^{-r'} \left(C_{r'} x^{-p'} + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}^{(r')} x^{i'p'} + lx \sum_{i'=0}^{i'=\infty} B_{i'}^{(r')} x^{i'p'} \right) \end{aligned}\right\} \text{III. a}$$

faaes, ifølge (5) og (10), af det almindelige particulære Integral

$$x^{1+r'} \frac{d^m y}{dx^m} = C_{r'} \frac{\gamma(m - p' - r')}{\gamma(-p' - r')} x^{-p'}$$

$$+ \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}^{(r')} \frac{\gamma(m + i'p' - r')}{\gamma(i'p' - r')} x^{i'p'} +$$

$$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} B_{i'}^{(r')} \frac{\gamma(m + i'p' - r')}{\gamma(i'p' - r')} x^{i'p'} \left(lx + \frac{\gamma'(m + i'p' - r')}{\gamma(m + i'p' - r')} - \frac{\gamma'(i'p' - r')}{\gamma(i'p' - r')} \right)$$

og

$$x^{1+r'} a x^{-m+p'} y = C_{r'} a + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} a A_{i'}^{(r')} x^{(i'+1)p'} + lx \sum_{i'=0}^{i'=\infty} a B_{i'}^{(r')} x^{(i'+1)p'}$$

I den ved Summen af disse 2 Ligninger, ifølge den første III. a, dannede Betingelse, vil, naar m ikke er positiv hel, eller negativ hel, Coefficienten til $x^{-p'}$ være $= 0$. Dernæst give Coefficienterne til x^0, til $x^{i'p'}\, lx$ og $x^{i'p'}$ henholdsvis Betingelserne

$$C_{r'} a - B_0^{(r')} \gamma(m - r') \frac{\gamma'(-r')}{(\gamma(-r'))^2} = 0,$$

eller, ifølge (11) i § 8

$$\left.\begin{aligned} B_0^{(r')} &= -a \frac{(-1)^{r'}}{[r'] \cdot \gamma(m - r')} C_{r'}, \\ B_{i'}^{(r')} &= -a \frac{\gamma(i'p' - r')}{\gamma(m + i'p' - r')} B_{i'-1}^{(r')} \text{ og} \\ A_{i'}^{(r')} &= -a \frac{\gamma(i'p' - r')}{\gamma(m + i'p' - r')} A_{i'-1}^{(r')} - \\ B_{i'}^{(r')} &\left(\frac{\gamma'(m + i'p' - r')}{\gamma(m + i'p' - r')} - \frac{\gamma'(i'p' - r')}{\gamma(i'p' - r')} \right); \quad A_0^{(r')} C'_{r'} \end{aligned}\right\} \text{III}'.\text{ a}$$

hvorved alle Coefficienterne $A_{i'}^{(r')}$ og $B_{i'}^{(r')}$ haves udtrykte ved de 2 arbitrære Constanter $C_{r'}$ og $C'_{r'}$. Sættes $C_{r'} = 0$, falder Integralet sammen med III'. I de foranstaaende Formler kan p' ikke være $= 0$; men ved denne Værdi af p' haves det i III'' angivne Integral.

Naar $m = m'$ (ɔ: positiv hel), og $p' \geqq m'$, vil III' give det fuldstændige Integral af III, hvori $n = -m' + p'$.

Naar $m = m'$, og $p' \leqq m' - 1$, faaes Integralet af III. a; men Betingelsen $r' \leqq p' - 1$ er da ikke tilstrækkelig; thi, for at Coefficienten til $x^{-p'}$ i dette Tilfælde skal kunne blive $= 0$, maa man have $r' \leqq m' - 1 - p'$.

Man maa altsaa, naar $m = m'$, og $p' \leqq m' - 1$, have $r' \leqq p' - 1$, eller $r' \leqq m' - 1 - p'$, eftersom $m' \gtrless 2\,p'$. Formlerne III'. a antage da, ifølge Formlen (3)' i § 8, Formen

$$\left.\begin{aligned}
B_0^{(r')} &= -a \frac{(-1)^{r'}}{[r'][m'-1-r']} C_{r'},\\
B_{i'}^{(r')} &= -a \frac{[i'p'-1-r']}{[m'+i'p'-1-r']} B_{i'-1}^{(r')} \text{ og}\\
A_{i'}^{(r')} &= -a \frac{[i'p'-1-r']}{[m'+i'p'-1-r']} A_{i'-1}^{(r')} -\\
B_{i'-1}^{(r')} &\sum_{t'=0}^{t'=m'-1} \frac{1}{t'+i'p'-r'}; \quad A_0^{(r')} = C'_{r'}
\end{aligned}\right\} \text{III''. a}$$

Naar $m' = 2p'$, falde de 2 høiere Grænseværdier for r' sammen, saa at r' ligesom i det almindelige Tilfælde III'. a, altid kan have de p' Værdier af $0, 1, 2, \ldots (p'-1)$. Ligningen

$$\frac{d^{2p'}y}{dx^{2p'}} + ax^{-p'}y = 0 \qquad \text{III. b}$$

vil derfor være fuldstændigt integreret ved

$$\left.\begin{aligned}
y &= x^{2p'-1} \sum_{r'=0}^{r'=p'-1} x^{-r'} \left(C_{r'}x^{-p'} + \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}^{(r')} x^{i'p'} + lx \sum_{i'=0}^{i'=\infty} B_{i'}^{(r')} x^{i'p'} \right)\\
B_{i'}^{(r')} &= \frac{(-a)^{i'+1}}{[(i'+1)p'-1-r'][(i'+2)p'-1-r']} \cdot \frac{(-1)^{r'}[p'-1-r']}{[r']} C_{r'}\\
A_{i'}^{(r')} &= -a \frac{[i'p'-1-r']}{[(i'+2)p'-1-r']} A_{i'-1}^{(r')} - B_{i'}^{(r')} \sum_{t'=0}^{t'=2p'-1} \frac{1}{t'+i'p'-r'}; \quad A_0^{(r')} = C'_{r'}
\end{aligned}\right\} \text{III'.b}$$

som giver en i Almindelighed meget stærkt convergerende Række. Den arbitrære Constant $C_{p'-1}$ er Værdien af y for $x = 0$.

En lineær Differentialligning af brudden Orden af Formen

$$\Sigma a_{i'}(x+c)^{n_{i'}} \frac{d^{m_{i'}}y}{dx^{m_{i'}}} = 0 \qquad \text{IV}$$

vil ofte kunne integreres ved den i § 11 til Integrationen af III anvendte Fremgangsmaade, altsaa ved at sætte

$$y = (x+c)^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'}(x+c)^{i'p},$$

hvilken Substitution navnligen vil være anvendelig, naar Ligningens Led kunne deles i 2 Grupper, saaledes beskafne, at $(n_{i'} - m_{i'})$ er constant i hver Gruppe for sig. Selvfølgelig ville specielle Værdier af Potensexponenter og Differentiationsindices kunne fordre, at Ligningen først transformeres ved en Forandring af Fortegnet for dens Orden (se Slutningen af § 11), eller de ville kunne bevirke, at Integrationsmethoden ikkun fører til partielle Integraler. Det sidste Tilfælde viser sig f. Ex. ved Integrationen af Ligningen (ι) i det følgende Ex. 2.

Naar $(n_{i'} - m_{i'})$ er $= n$, ɔ: constant i alle Led af IV, vil Ligningen, efter Division med $(x+c)^n$, antage Formen

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a_{i'}(x+c)^{m_{i'}} \frac{d^{m_{i'}}y}{dx^{m_{i'}}} = \\ a_0(x+c)^{m_0}\frac{d^{m_0}y}{dx^{m_0}} &+ a_1(x+c)^{m_1}\frac{d^{m_1}y}{dx^{m_1}} + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{V}$$

af hvilken Ligning Ligningen III for $n = -m$ vil være en speciel Form. Den oven anførte Substitution giver da ogsaa for V Integralet

$$y = \Sigma A_q (x+c)^q$$

idet de forskjellige Værdier af q erholdes som Rødder i Ligningen

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a_{i'} \frac{\gamma(1+q)}{\gamma(1+q-m_{i'})} = \\ \gamma(1+q)&\left(\frac{a_0}{\gamma(1+q-m_0)} + \frac{a_1}{\gamma(1+q-m_1)} + \ldots\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{V}'$$

som i Almindelighed maa løses ved Hjælp af Formlerne (3) og (4), eller (4)' i Forbindelse med Tabellerne over Γ Functionen. Herved vil man dog i Reglen kun kunne vente at bestemme de reelle Rødder; men, naar $m_{i'} = \pm m'_{i'}$, ɔ: naar Ordenen af Ligningen er positiv, eller negativ hel, antager den anden Ligning V', ifølge (3), den simplere Form

$$\Sigma a_{i'} \frac{«q»}{«q \mp m'_{i'}»} = 0,$$

saa at, naar man betegner det største af Tallene $m'_{i'}$ ved m', q bliver Rod i en algebraisk Ligning af Graden m'.

Dette Resultat er bekjendt for $m_{i'} = + m'_{i'}$, idet Ligningen til Bestemmelsen af q, ifølge (2), bliver

$$\Sigma a_{i'} q (q-1)(q-2) \ldots (q-(m'_{i'}-1)) = 0,$$

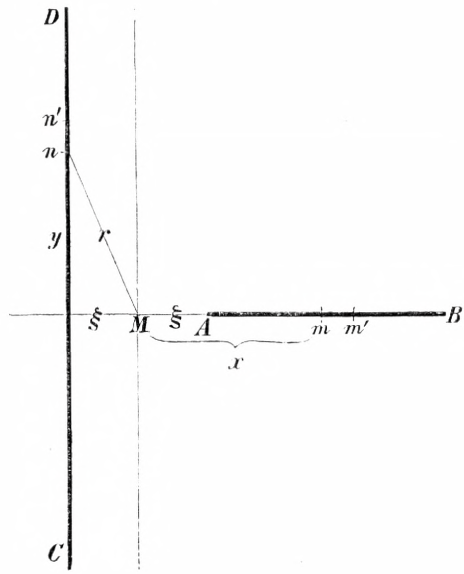
og Integrationen af V ved V' frembyder saaledes en ret mærkelig Generalisation af den Integration, som er bekjendt, naar Ordenen af V er positiv hel.

Naar Ordenen af V er negativ hel, $m_{i'} = - m'_{i'}$, bliver q bestemt ved

$$\Sigma \frac{a_{i'}}{(q+m_{i'}) \ldots . (q+2)(q+1)} = 0$$

Ex. 1. Fig. 6. Et materielt Punkt M (i de retvinklede Coordinaters Begyndelsespunkt) bliver paavirket af Elementerne nn' i en materiel uendelig ret Linie CD, parallel med y Axen og i en Afstand ξ til Venstre af denne, samt af Elementerne mm' i én, i Retning af B uendelig, ret Linie AB, beliggende i x Axen og med sit Endepunkt A i Afstanden $MA = \xi$ til Høire af Begyndelsespunktet. Efter hvilken Function $\varphi(r)$ af Afstanden r maa Tiltrækningen (Frastødningen) virke, naar Forsøg have givet, at Forholdet mellem Virkningerne af CD og AB er $= k$, ɔ: constant, uafhængigt af ξ?

Fig. 6.



Virkningen af $nn' = dy$ er $\varphi(r)\,dy = \varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})\,dy$, og denne Virknings Composant, parallel med x Axen, er $\dfrac{\xi \cdot \varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}}\,dy$. Hele Virkningen af CD paa M er altsaa

$$2\,\xi \int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}}\,dy$$

Den af Elementet $mm' = dx$ udøvede Paavirkning er $= \varphi(x)\,dx$, saa at hele Virkningen af AB bliver

$$\int_\xi^\infty \varphi(x)\,dx$$

Functionen φ skal altsaa bestemmes af

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}}\,dy = -\frac{k}{2\xi}\int_\infty^\xi \varphi(x)\,dx$$

Venstre Side af denne Ligning kan — paa samme Maade som i Ex. 3 i Art. 4 — bringes paa Formen (D), og man faaer da, idet $\zeta = \frac{1}{\xi^2}$, $z = \frac{1}{x^2}$, $dx = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta}\, \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) d\zeta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} k \zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{\zeta} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{z}}\right) . z^{-\frac{3}{2}}\, dz$$

Naar man differentierer denne Ligning med Hensyn til ζ og sætter

$$\frac{1}{\zeta}\, \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = u$$

faaer man

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} u}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{k}{2\sqrt{\pi}}\, \zeta^{-\frac{1}{2}}\, u = 0$$

som er af Formen V, eller af Formen III for $n = -m = -\frac{1}{2}$. Ligningen vil derfor være integreret ved

$$u = \frac{1}{\zeta}\, \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = \Sigma C_q\, \zeta^q, \text{ eller}$$

$$\varphi(r) = \Sigma \frac{C_q}{r^{2(1+q)}},$$

idet q maa bestemmes som Rod i Ligningen

$$\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+\frac{1}{2})} = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} = \frac{k}{2\gamma(\frac{1}{2})}$$

som i Almindelighed maa løses ved Hjælp af Formlerne (3) og (4), eller (4)' i Forbindelse med Tabellerne over Γ Functionen. En enkelt reel Rod i Ligningen vil dog ofte, ved specielle Værdier af Forholdet k mellem Virkningerne af CD og AB, kunne umiddelbart ses. Saaledes vil

$$k = 2 \quad \text{give} \quad q = 0 \quad \text{og} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^2}$$

$$k = 4 \quad \text{»} \quad q = 1 \quad \text{»} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^4}$$

. . . .

$$k = \pi \quad \text{»} \quad q = \tfrac{1}{2} \quad \text{»} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^3}$$

$$k = \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{»} \quad q = \tfrac{3}{2} \quad \text{»} \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^5}$$

. . . .

Ex. 2. Fig. 6. Punktet M paavirkes ligesom i det foregaaende Exempel af Linierne CD og AB; men Forholdet mellem Virkningerne af CD og AB er fundet at være $= k\xi$.

Loven $\varphi(r)$ for de moleculære Paavirkninger bliver da at bestemme af

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2 + y^2})}{\sqrt{\xi^2 + y^2}}\, dy = -\tfrac{1}{2}k \int_\infty^\xi \varphi(x)\, dx$$

som giver

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \zeta^{\frac{1}{2}} \int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta}\, \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) d\zeta^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}k \int_0^\zeta \frac{1}{\zeta}\, \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}$$

Sættes

$$\frac{1}{\zeta}\, \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = u \quad \text{og} \quad \frac{k}{2\sqrt{\pi}} = -a,$$

faaes ved Differentiation med Hensyn til ζ

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \int_0^{(\frac{1}{2})} u\, d\zeta^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} u\, d\zeta^{\frac{1}{2}} + a u = 0 \qquad (\vartheta)$$

som, naar man sætter

$$\int_0^{(\frac{1}{2})} u\, d\zeta^{\frac{1}{2}} = v,$$

bringes paa den simplere Form

$$\zeta \frac{dv}{d\zeta} + \frac{1}{2} v + a \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{d\zeta^{\frac{1}{2}}} = 0 \qquad (\iota)$$

som er af Formen IV og bestaaer af 2 Grupper af Led, hver med sin constante Værdi for $(n_{i'} - m_{i'})$. Ligningen skulde altsaa kunne fuldstændigt integreres paa samme Maade som III, altsaa ved at sætte

$$v = \zeta^q \sum_{i'=0}^{i'=\infty} A_{i'} \zeta^{i'p}$$

men, naar man forsøger denne Integrationsmethode, vil man støde paa særegne Vanskeligheder, begrundede i Ligningens specielle Værdier for Potensexponenter og Differentiationsindices, saa at det kun vil lykkes at finde particulære Integraler i Ligningen. Omendskjøndt disse Integraler kunde findes paa en noget lettere Maade, vil jeg, for at vise den methodiske Fremgangsmaade ved Integrationen af IV, foretrække først at anvende den. Methodens Anvendelse i dette Tilfælde vil desuden i flere Henseender være meget oplysende, idet den f. Ex. viser, hvorledes en Række af lignende Form som III' kan beregnes ogsaa for $r' = \infty$, og Rækken vendes om, saaledes at A_0 bliver til A_∞.

Ved Differentiation efter (5) af det ovenstaaende Udtryk for v og ved dets Indsættelse i (ι) finder man da

$$\sum_{i'=0}^{i'=\infty} (q + i'p + \tfrac{1}{2}) A_{i'} \zeta^{i'p} + a \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{\gamma(q + i'p + 1)}{\gamma(q + i'p + \frac{1}{2})} A_{i'} \zeta^{i'p - \frac{1}{2}} = 0$$

Naar man heraf skal kunne finde et fuldstændigt Integral, maa man sætte

$$\frac{\gamma(q+1)}{\gamma(q+\frac{1}{2})} A_0 = 0, \quad i'p - \tfrac{1}{2} = (i'-1)p \quad \text{og}$$

$$(q + (i'-1)p + \tfrac{1}{2}) A_{i'-1} + a \frac{\gamma(q + i'p + 1)}{\gamma(q + i'p + \frac{1}{2})} A_{i'} = 0,$$

hvilke 3 Betingelser give

$$q = -\tfrac{1}{2} - r', \quad \text{idet} \quad r' = 0, 1, 2, \ldots \infty,$$

$$p = \tfrac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$\left(\frac{i'-1}{2}-r'\right)\left(A_{i'-1}+a\frac{\gamma\left(\frac{i'-1}{2}-r'\right)}{\gamma\left(\frac{i'}{2}-r'\right)}A_{i'}\right)=0 \qquad (\varkappa)$$

Naar man vil benytte $(\varkappa)$ til at udtrykke alle Coefficienterne ved A_0, da finder man først for $i'=1$

$$A_1=-\frac{1}{a}\frac{\gamma(\frac{1}{2}-r')}{\gamma(-r')}A_0=0$$

hvornæst $(\varkappa)$ giver

$$A_{i'}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{i'}{2}-1-r'\right)A_{i'-2} \qquad (\varkappa)'$$

saa at man faaer $A_1=A_3=A_5=\ldots=0$.

Den første (ↄ: $i'=1$) Betingelse $(\varkappa)$, eller

$$(-r')A_0+a\frac{\gamma(1-r')}{\gamma(\frac{1}{2}-r')}A_1=0$$

kan dog, naar A_1 skal være $=0$, ikke tilfredsstilles ved nogen anden endelig Værdi af r' end 0, og denne Værdi for r' vil, ifølge $(\varkappa)'$, give $A_2=0$, $A_4=0,\ldots$, saa at $r'=0$ giver det particulære Integral

$$v=A_0\zeta^{-\frac{1}{2}}$$

Hvis man vilde udtrykke alle Coefficienterne ved $A_{2r'}=C$, vilde $(\varkappa)$ for $i'=2r'$ give

$$A_{2r'-1}=-a\frac{\gamma(-\frac{1}{2})}{\gamma(o)}A_{2r'}=0$$

hvornæst man af $(\varkappa)'$ vilde faae

$$A_{2r'-1}=A_{2r'-3}=A_{2r'-5}=\ldots=A_1=0$$

Man kan derfor sætte $i'=2(r'-s')$, som, da r' maa være uendelig, giver

$$v=\zeta^{-\frac{1}{2}-r'}\sum_{s'=r'}^{s'=0}A_{2(r'-s')}\zeta^{r'-s'}=\zeta^{-\frac{1}{2}}\sum_{s'=0}^{s'=\infty}A_{2(r'-s')}\zeta^{-s'}$$

Ved i $(\varkappa)'$ at sætte $i'=2(r'-s')$ finder man

$$A_{2(r'-(s'+1))}=\frac{-a^2}{s'+1}A_{2(r'-s')}$$

som giver

$$A_{2(r'-1)} = \frac{-a^2}{1} C, \; A_{2(r'-2)} = \frac{-a^2}{2} A_{2(r'-1)} = \frac{(-a^2)^2}{[2]} C, \; \ldots .$$

$$A_{2(r-s')} = \frac{(-a^2)^{s'}}{[s']} C$$

og altsaa

$$v = \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} C \frac{(-a^2)^{s'}}{[s']} \zeta^{-s'} = C \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} \frac{1}{[s']} \left(-\frac{a^2}{\zeta}\right)^{s'}$$

Til $r' = 0$ og $r' = \infty$ svare altsaa henholdsvis 2 particulære Integraler

$$v = C\zeta^{-\frac{1}{2}} \quad \text{og} \quad v = C\zeta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}} \tag{ι)'$$

u skal dernæst, i Overensstemmelse med Reglerne i Art. 2, bestemmes af

$$\int_0^{(\frac{1}{2})} u \, d\zeta^{\frac{1}{2}} = v, \quad u = \left\{\frac{d^{\frac{1}{2}} v}{d\zeta^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

saa at man, ifølge (γ), naar en Løsning skal være mulig, maa have $\frac{v}{\zeta^{\frac{1}{2}-1}} = v\zeta^{\frac{1}{2}} = 0$ for $\zeta = 0$. Denne Betingelse viser, at det første particulære Integral i $(\iota)'$ ikke kan bruges til Bestemmelsen af u; det 2det particulære Integral, eller

$$v = C\zeta^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{a^2}{\zeta}}$$

giver derimod, ifølge (β), eller I, II og II a, eller I' og II',

$$u = \pm C a \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}}$$

Naar man indsætter Værdierne for u og $\int_0^{(\frac{1}{2})} u \, d\zeta^{\frac{1}{2}} = v$ i (ϑ), finder man, at u maa tages med det nederste Fortegn; men ved Bestemmelsen af φ bliver Hensynet til Fortegnet uden Betydning, da man, med en forandret Betegnelse for den arbitrære Constant, kan sætte

$$u = \frac{1}{\zeta} \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\right) = K\zeta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}} = K . \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{k^2}{4\pi\zeta}}$$

som giver den søgte Tiltrækningslov

$$\varphi(r) = Kr \, . \, e^{-\frac{k^2 r^2}{4\pi}}$$

Da Integrationsmethoden imidlertid ikke i dette Tilfælde har ført til et fuldstændigt Integral for (ι), er der en Mulighed for, at der gives andre particulære Integraler end det sidste $(\iota)'$, som tilfredsstille Betingelsen $v\zeta^{\frac{1}{2}} = 0$ for $\zeta = 0$, og som derfor vilde kunne bruges til Bestemmelsen af u og φ.

Liouville, der har forsøgt Løsningen af Problemet for $k = 1$, angiver — uden nærmere at gaae ind paa Fremstillingen af den af ham fulgte Fremgangsmaade — som Resultat et particulært Integral af en Liouvillesk Differentialligning af brudden Orden og af Formen III. Som particulært Integral af denne Ligning er Resultatet rigtigt; men det kan ikke bruges til Bestemmelsen af φ; thi det viser sig let for $k = 1$ at maatte medføre

$$\varphi(r) = r \int_0^\infty \alpha^2 \, e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} - \alpha^2 r^2} \, d\alpha$$

som med de her brugte Betegnelser giver

$$u = \zeta^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \alpha^2 \, e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} - \frac{\alpha^2}{\zeta}} \, d\alpha$$

Da dette er en speciel Form af

$$u = \zeta^{-\frac{1}{2} - 1} \int_c^b f(\alpha) \, e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} \, d\alpha$$

vil man ved Hjælp af (β), eller af Formlen II. b i Art. 2 let kunne undersøge, om et Integral af denne Form for specielle Functionsformer f og specielle Værdier af b og c vil kunne tilfredsstille (ϑ). Man finder da

$$\frac{1}{2} \int_0^{(\frac{1}{2})} u \, d\zeta^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \, \zeta^{-\frac{1}{2}} \int_c^b \frac{f(\alpha)}{\alpha} \, e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} \, d\alpha \quad \text{og}$$

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \cdot \int_0^{(\frac{1}{2})} u \, d\zeta^{\frac{1}{2}} = \pm \zeta^{-\frac{3}{2}} \int_c^b \alpha f(\alpha) \, e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha \mp \zeta^{-\frac{1}{2}} \int_c^b \frac{f(\alpha)}{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha$$

som, indsatte tilligemed Værdien for u i (ϑ), give

$$\pm \int_c^b \alpha f(\alpha) \, e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha + a \int_c^b f(\alpha) \, e^{-\frac{\alpha^2}{\zeta}} d\alpha = 0$$

der ikke vil kunne tilfredsstilles ved $f(\alpha) = \alpha^2 \, e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}$, $c = 0$ og $b = \infty$, men maa fordre $\alpha = \mp a$, som, idet da $f(\alpha) \, d\alpha$ bliver $= K$, giver det allerede fundne particulære Integral, den sidste Formel $(\iota)'$.

Dette particulære Integral vilde man være kommen noget lettere til, hvis man fra Begyndelsen af havde villet give Afkald paa Muligheden af at finde et fuldstændigt Integral; thi man vilde da have kunnet sætte

$$(q + \tfrac{1}{2}) A_0 = 0, \quad (i' + 1)p = i'p - \tfrac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$(q + (i' + 1)p + \tfrac{1}{2}) \, A_{i'+1} + a \frac{\gamma(q + i'p + 1)}{\gamma(q + i'p + \frac{1}{2})} A_{i'} = 0,$$

hvilke 3 Betingelser give

$$q = -\tfrac{1}{2}, \quad p = -\tfrac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$A_{i'+1} = a \frac{\gamma\left(-\frac{i'}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\gamma\left(-\frac{i'}{2}\right)} A_{i'} = a^2 \frac{\gamma\left(-\frac{i'}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\gamma\left(-\frac{i'}{2} + \frac{1}{2}\right)} A_{i'-1}$$

som viser, at man maa have $A_1 = A_3 = A_5 = \ldots = 0$. Sættes derfor $i' = 2s'$, $A_{2s'} = B_{s'}$, faaes, ved i ovenstaaende Ligning at forandre i' til $(i' - 1) = (2s' - 1)$,

$$B_{s'} = a^2 \frac{\gamma(-s')}{\gamma(-s' + 1)} B_{s'-1} = \frac{\gamma(-s')}{\gamma(o)} a^{2s'} B_0 = \frac{B_0}{[s']} (-a^2)^{s'}$$

hvorved Formlen (12) i § 8 er bleven benyttet. Man har altsaa

$$v = \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} B_{s'} \, \zeta^{-s'} = B_0 \, \zeta^{-\frac{1}{2}} \sum_{s'=0}^{s'=\infty} \frac{1}{[s']} \left(-\frac{a^2}{\zeta}\right)^{s'}$$

som giver det tidligere fundne particulære Integral (ι)'

$$v = C\zeta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{\zeta}}$$

Art. 6. Integration af den lineære Differentialligning

$$(ax^2 + bx + c)\frac{d^2y}{dx^2} + (b_1 x + c_1)\frac{dy}{dx} + c_2 y = F(x) \qquad \text{VI}$$

Denne Ligning er for $F(x) = 0$ behandlet af Liouville; men hans complementære Function (se Forordet til 1ste Hovedafsnit) vil her let give og har givet Anledning til Feiltagelser, som i en Anm. i Slutningen af denne Art. ville blive nærmere omtalte.

Naar Ligningen VI differentieres, efter Formlen (8) i § 6, med Index m, faaer man, ved i (8) i Stedet $f_2(x)$ efter Haanden at sætte $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ og y, Ligningen

$$(ax^2 + bx + c)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} + ((2ma + b_1)x + mb + c_1)\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$$
$$+ (m(m-1)a + mb_1 + c_2)\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m F(x)}{dx^m}$$

Ved at bestemme m saaledes, at Coefficienten til $\frac{d^m y}{dx^m}$ bliver $= 0$, altsaa ved at sætte

$$\left.\begin{array}{ll} m = \dfrac{a - b_1 \pm \sqrt{(a-b_1)^2 - 4ac_2}}{2a} = \begin{cases} m_1 \\ m_2 \end{cases} & \\ \text{eller, naar } a = 0, \qquad m = -\dfrac{c_2}{b_1} & \end{array}\right\} \qquad \text{VII}$$

samt

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = z, \text{ eller } y = \frac{d^{-m-1}z}{dx^{-m-1}} + \psi(-m-1, x)$$

reduceres Ligningen til

$$(ax^2 + bx + c)\frac{dz}{dx} + ((2ma + b_1)x + mb + c_1)z = \frac{d^m F(x)}{dx^m} \qquad \text{VIII}$$

hvori man enten kan tage $m = m_1$, eller $m = m_2$, eller, hvis $a = 0$, $m = -\frac{c_2}{b_1}$, og deraf bestemme z, som derpaa, med den for m anvendte Værdi, giver

$$y = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}} + \psi(-m-1, x) = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}} + x^m \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'} \qquad \text{IX}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^{-m} z}{dx^{-m}} + x^{m-1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (m - r') C_{r'} x^{-r'}$$

af hvilke 2 Ligninger det (s. § 3, Punkt 3 og 4) undertiden vil være let, naar y_0 og $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ikke ere uendelige, at bestemme Constanterne $C_{r'}$ og den i z indgaaede Constant K saaledes, at $x = 0$ giver $y = y_0$ og $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$.

I Almindelighed maa dog og kunne altid disse Constanter bestemmes derved, at man indsætter Udtrykkene for y, $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2y}{dx^2}$, udledede af IX, i VI, hvorved da ikkun 2 af Constanterne kunne forblive arbitrære.

Constanterne ville i Reglen altid blive lettest bestemte, naar Differentiationen $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ i IX er foretagen saaledes, at $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ er holdt fuldstændigt fri for Led af Complementet, saa at alle Led af denne Form, forekommende i IX, alene ville findes i $x^m \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$. Dette vil, som bekjendt, kunne opnaaes ved, at $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ beregnes enten efter Formlerne (5), (5)', (9), (10), eller efter ((6)) eller ((7)) med en vis bestemt lavere Grændse a, som, naar man betegner z ved $f(x)$, gjør $\lim \varepsilon f(a + \varepsilon) = 0$, derved at Potensexponenterne i Rækken for $f(a + \varepsilon)$ efter Potenser af $\varepsilon = x - a$ ere > -1. Naar Potensexponenterne i Rækken for z efter Potenser af x ere > -1, bliver altsaa den lavere Grændse af Integralet i ((6)) og ((7)) $a = 0$. Ihvorvel det theoretisk set ikke er absolut nødvendigt, ville vi derfor i det Følgende gaae ud fra den Forudsætning, at $\frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ i IX er holdt fri for Led af Complementet, som altsaa alene findes i $\psi(-m-1, x) = x^m \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$.

Skulde VII gjøre m imaginær, vil der i IX indgaae Functioner af Formen $\gamma(a+b\sqrt{-1})$, hvis numeriske Beregning er angiven i § 1; men meget ofte — som i det følgende Ex. 1 — ville disse Functioner optræde som Factorer til Constanten K, med hvilken de da kunne sammensmeltes, saa at deres Beregning bliver overflødig.

Den anførte Fremgangsmaade ved Integrationen af VI er den almindelige og altid rigtige, som svarer til alle Tilfælde, med Undtagelse af det, i hvilket a og b_1 ere samtidigt $= 0$. Ofte vil man dog kunne erholde et particulært Integral $y = \frac{d^{-m-1} z}{dx^{-m-1}}$ ved at forudsætte Complementet $\psi(-m-1, x) = 0$; men Rigtigheden heraf maa altid prøves ved Indsættelse i VI. Paa samme Maade vil, naar m har 2 Værdier m_1 og m_2, Bestemmelsen af det fuldstændige Integral ofte kunne ske paa en anden (i Virkeligheden dog sjeldent simplere) Maade, naar man forudsætter, at $\psi_1(-m_1-1, x) = 0$ og $\psi_2(-m_2-1, x) = 0$ i IX ville give de particulære Integraler $\frac{d^{-m_1-1} z}{dx^{-m_1-1}}$ og $\frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}}$ og altsaa det fuldstændige Integral

$$y = \frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}} + \frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}} \qquad \text{IX}'$$

idet z_1 og z_2 ere henholdsvis bestemte af VIII for $m = m_1$ og $m = m_2$.

En Sammenstilling af IX med IX' viser imidlertid, at den sidste Formel ikkun da vil kunne give et Integral, naar $\frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}}$ er af Formen $\psi_1(-m_1-1, x)$, eller $\frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}}$ er af Formen $\psi_2(-m_2-1, x)$. Selv da vil det være nødvendigt ved Indsættelse i VI at prøve Rigtigheden af IX'. Naar man vil benytte det i alle Tilfælde gjældende i IX fremstillede Integral, er man vel, som foran anført, ogsaa i Almindelighed nødt til at foretage en Indsættelse i VI for at faae Constanterne bestemt; men denne Indsættelse vil altid føre til Maalet, i hvert Fald til et particulært Integral, hvorimod det er muligt, at Indsættelsen i VI af IX' vil vise, at denne sidste Formel ikke giver noget Integral.

Liouville, der som sagt har behandlet VI for $F(x) = 0$, kommer til et fuldstændigt Integral af samme Form som IX', naar man i denne Formel ombytter min Differentiation med Liouvilles; men han bemærker selv om dette Resultat, at det ikke nødvendigvis i alle Tilfælde er rigtigt, men fordrer en Prøve. Naar det senere andetsteds (f. Ex. hos Ramus Pag. 322 og i «Mathematisk Tidsskrift» for 1864, Pag. 15) er fremstillet som absolut gyldigt, da er dette urigtigt. Ogsaa Liouville angiver det altid gyldige Integral ved en Formel af samme Form som IX, naar man i den ombytter min Differentiation med hans og mit Complement med hans «Complementære Function»; men det vilde være urigtigt at antage, at man ved Liouvilles Methode i alle Tilfælde vil erholde et particulært Integral af denne Formel ved i den at udelade den «Complementære Function»; denne maa tværtimod i Almindelighed medtages og søges bestemt ved Indsættelse i VI.

Af Ligninger, som kunne transformeres til VI, anføres dels efter Liouville, dels efter «Mathematisk Tidsskrift» for 1864 Pag. 17:

1) Ligningen

$$\left.\begin{array}{l} c_2 \dfrac{dy^2}{dx^2} + (c_1 + b_1 x) \dfrac{dy}{dx} + (c + bx + ax^2).y = F(x) \\ \text{der ved} \qquad y = e^{\int (p+qx)\, dx} . z \end{array}\right\} \qquad \text{VI. a}$$

transformeres til en Ligning af samme Form, hvornæst p og q kunne bestemmes saaledes, at Ligningen faaer Formen

$$c^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (Ax + B) \frac{dz}{dx} + Cz = f(x)$$

2) Ligningen

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x}\right) \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \left(\dfrac{p}{x^3} + \dfrac{q}{x^2}\right) \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{c_2}{x^4}\, y = F(x) \\ \text{der ved} \qquad\qquad x = \dfrac{1}{\xi} \end{array}\right\} \quad \text{VI. b}$$

bringes paa Formen VI

3) Ligningen

$$\left.\begin{array}{l} x^2(ax + b) \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x(px + q) \dfrac{dy}{dx} + (rx + s) y = F(x) \\ \text{der ved} \qquad\qquad y = x^k z \end{array}\right\} \quad \text{VI. c}$$

bringes paa Formen

$$x(ax^2 + bx) \frac{d^2 z}{dx^2} + x(K_1 x + K_2) \frac{dz}{dx} + (K_3 x + K_4) z = x^{-k} F(x),$$

hvornæst k bestemmes saaledes, at K_4 bliver $= 0$, saa at x kan bortdivideres af venste Side af Ligningen, der da bliver af Formen VI

Ex. 1. Ligningen

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + c_2 y = 0,$$

som er af Formen V i Art. 5, er som bekjendt integreret ved

$$y = k_1 x^{m_1} + k_2 x^{m_2}$$

idet m_1 og m_2 netop have de i VII indeholdte 2 Værdier m_1 og m_2 for Differentiationsindex m. Dette Resultat findes let ved Methoden til Integration af VI.

Først bestemmes nemlig m_1 og m_2 ved VII, og, naar man f. Ex. tager $m = m_1$, bliver da VIII

$$ax \frac{dz_1}{dx} + (2m_1 a + b_1) z_1 = 0$$

Da $m_1 + m_2 = 1 - \frac{b_1}{a}$, kan man indføre $\frac{b_1}{a} = 1 - m_1 - m_2$ i Ligningen, hvorved denne bliver

$$x \frac{dz_1}{dx} + (m_1 - m_2 + 1) z_1 = 0,$$

som giver $$z_1 = K x^{-m_1 + m_2 - 1}$$

hvornæst IX med $m = m_1$ giver

$$y = C x^{m_2} + x^{m_1} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$$

idet man har sat $$K \frac{\gamma(-m_1 + m_2)}{\gamma(m_2 + 1)} = C.$$

Ved derpaa at indsætte det fundne Udtryk for y tilligemed de deraf afledede for $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2 y}{dx^2}$ i den givne Differentialligning finder man let, at C og C_0 kunne forblive arbitrære, men at de andre Coefficienter C_1, C_2, C_3, ... af Complementet maae være $= 0$, saa at det fuldstændige Integral bliver

$$y = C x^{m_2} + C_0 x^{m_1}$$

Da $\frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}} = C x^{m_2}$ er af Formen $\psi_2(-m_2 - 1, x)$, kunde der have været Anledning til at prøve, om ikke $\frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}}$ vilde give et particulært Integral, eller om ikke

$$y = \frac{d^{-m_1-1} z_1}{dx^{-m_1-1}} + \frac{d^{-m_2-1} z_2}{dx^{-m_2-1}} = C x^{m_2} + C' x^{m_1}$$

vilde give et fuldstændigt Integral.

Naar a og b_1 ere samtidigt $= 0$, kan m ikke bestemmes ved VII, og Ligningen VI faaer da, naar man i Stedet for $(x + c)$ sætter x, Formen

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + c_1 \frac{dy}{dx} + c_2 y = F(x) \qquad \text{X}$$

Differentiation af denne Ligning med Index m giver

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + (m + c_1)\frac{dz}{dx} + c_2 z = \frac{d^m F(x)}{dx^m}$$

idet man har sat

$$\frac{d^m y}{dx^m} = z, \quad \text{eller} \quad y = \frac{d^{-m} z}{dx^{-m}} + \psi(-m, x).$$

Ved Substitutionen

$$x = \xi^2$$

forandres atter Ligningen til

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + (m + c_1 - \tfrac{1}{2})\frac{2}{\xi}\frac{dz}{d\xi} + 4c_2 z = 4\left(\frac{d^m F(x)}{dx^m}\right)_{x = \xi^2}$$

som gjøres integrabel ved at sætte

$$m = \tfrac{1}{2} - c_1$$

Indføres nu tillige den forkortede Betegnelse

$$4\left(\frac{d^m F(x)}{dx^m}\right)_{x = \xi^2} = f(\xi) \qquad \text{XI}$$

faaes

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + 4c_2 z = f(\xi)$$

som, ifølge Theorien for de arbitrære Constanters Variation, giver

$$z = K_1\, e^{\sqrt{-4c_2 x}} \int^{\xi = \sqrt{x}} e^{-\xi\sqrt{-4c_2}} f(\xi)\, d\xi + K_2\, e^{-\sqrt{-4c_2 x}} \int^{\xi = \sqrt{x}} e^{\xi\sqrt{-4c_2}} f(\xi)\, d\xi \qquad \text{XII}$$

saa at man faaer

$$y = \frac{d^{c_1 - \frac{1}{2}} z}{dx^{c_1 - \frac{1}{2}}} + x^{-(c_1 + \frac{1}{2})} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'}\, x^{-r'} \qquad \text{XIII}$$

Constanterne $C_{r'}$ saavelsom K_1 og K_2 bestemmes dernæst, naar man indsætter de af XIII erholdte Værdier for y, $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2y}{dx^2}$ i X. I Almindelighed ville Complementets Coefficienter $C_{r'}$ blive $= 0$; men samtidigen vil da Ligningens særegne Form bevirke, at K_2 bliver afhængig af K_1, saa at man kun faaer et particulært Integral. Differentiationen $\frac{d^{c_1-\frac{1}{2}} z}{dx^{c_1-\frac{1}{2}}}$ forudsættes herved foretagen saaledes, at den ikke medfører Led af Formen $\psi(c_1-\frac{1}{2}, x)$, som derfor alene ville findes i $x^{-(c_1+\frac{1}{2})} \Sigma C_{r'} x^{-r'}$.

Naar $F(x)$ **er** $= 0$, bliver

$$z = K_1 e^{\sqrt{-4c_2 x}} + K_2 e^{-\sqrt{-4c_2 x}} = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (K_1 + (-1)^{r'} K_2) \frac{2^{r'} (-c_2)^{\frac{r'}{2}}}{[r']} x^{\frac{r'}{2}}$$

altsaa, ifølge XIII,

$$y = \sum_{r'=0}^{r'=\infty} (K_1 + (-1)^{r'} K_2) \frac{2^{r'} (-c_2)^{\frac{r'}{2}}}{[r']} \frac{\gamma\left(1+\frac{r'}{2}\right)}{\gamma\left(1+\frac{r'+1}{2}-c_1\right)} x^{\frac{r'+1}{2}-c_1}$$
$$+ x^{-(c_1+\frac{1}{2})} \sum_{r'=0}^{r'=\infty} C_{r'} x^{-r'}$$

Naar denne Værdi for y tilligemed de deraf afledede for $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2 y}{dx^2}$ indsættes i X, finder man, at $C_{r'}$ maa være $= 0$ og $K_2 = -K_1$. Man har derfor

$$y = \frac{d^{c_1-\frac{1}{2}} z}{dx^{c_1-\frac{1}{2}}} = K_1 \frac{d^{c_1-\frac{1}{2}}}{dx^{c_1-\frac{1}{2}}} \left(e^{\sqrt{-4c_2 x}} - e^{-\sqrt{-4c_2 x}}\right)$$

eller, idet man i Rækken for y kan sætte $r' = 2i' + 1$, multiplicere med $\gamma(2-c_1)$ og sætte andre constante Factorer udenfor Σ Tegnet, den i Almindelighed stærkt convergerende Række

$$y = C x^{1-c_1} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{\gamma(2-c_1)}{\gamma(i'+2-c_1)} \frac{(-c_2 x)^{i'}}{[i']}, \text{ eller}$$

$$y = C x^{1-c_1} \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{(-c_2 x)^{i'}}{[i'] \cdot (2-c_1)(3-c_1)\ldots(i'+1-c_1)} \qquad \text{XIII}'$$

Naar $c_1 < \frac{1}{2}$, bliver, idet Potensexponenterne i Rækken for z ere > -1,

$$y = \frac{d^{c_1-\frac{1}{2}} z}{dx^{c_1-\frac{1}{2}}} = K_1 \int_0^{\bullet(\frac{1}{2}-c_1)} \left(e^{\sqrt{-4c_2 x}} - e^{-\sqrt{-4c_2 x}}\right) dx^{\frac{1}{2}-c_1}$$

som ved en hvilkensomhelst af Formlerne (A) til (G) i **Art. 4** kan bringes under Formen af et bestemt Integral.

Er $c_1 - \frac{1}{2} = m' + \mu$, bliver, ifølge ((7))

$$y = \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \int_0^{(1-\mu)} z\, dx^{1-\mu} = K_1 \frac{d^{m'+1}}{dx^{m'+1}} \int_0^{(1-\mu)} \left(e^{\sqrt{-4c_2 x}} - e^{-\sqrt{-4c_2 x}}\right) dx^{1-\mu}$$

hvori ligeledes $\int^{(1-\mu)} z\, dx^{1-\mu}$ ved en af Formlerne (A)—(G) kan bringes under Formen af et bestemt Integral.

Ex. 2. Ligningen

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0 \qquad (\lambda)$$

har, ifølge XIII', det particulære Integral

$$y = Cx \sum_{i'=0}^{i'=\infty} \frac{x^{i'}}{[i'] \, [i'+1]} \qquad (\lambda)'$$

som ogsaa let erholdes af III' for $r' = 0$, idet Ligningen er en speciel Form af III i Art. 5.

For det samme particulære Integral haves

$$y = K_1 \int_0^{(\frac{1}{2})} \left(e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}\right) dx^{\frac{1}{2}}$$

som ved Formlerne (A)—(G) kan bringes paa Formen af et bestemt Integral. Saaledes vil f. Ex. Formlen (G) for $m = \frac{1}{2}$, $c^2 = 0$ og $\frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = e^{\pm 2\sqrt{x}}$, eller $\varphi(t) = t e^{\pm 2t}$ give

$$y = K\sqrt{x} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, . \, e^{2\sqrt{x}\sin\theta} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, e^{-2\sqrt{x}\sin\theta} d\theta \right)$$

eller, naar man i det første Integral sætter $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ og i det 2det Integral $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$,

$$y = K\sqrt{x} \int_0^{\pi} \cos\alpha \, . \, e^{2\sqrt{x}\cos\alpha} d\alpha \qquad (\lambda)''$$

som altsaa kun er en anden Form for det particulære Integral $(\lambda)'$.

Af det particulære Integral $(\lambda)'$ eller $(\lambda)''$ kan man paa sædvanlig Maade fremstille det fuldstændige Integral; men dette vil ogsaa ved en særegen Fremgangsmaade (s. «Mathematisk Tidsskrift» for 1864, Pag. 30) og ved Afbenyttelse af det particulære Integral $(\lambda)''$ kunne gives en smukkere Form. En stærkt convergerende Række vil dog i Reglen være at foretrække, og en saadan er allerede funden i Art. 5, idet (λ) er en speciel Form af III. b, saa at III'. b for $p' = 1$ og $a = -1$ giver det fuldstændige Integral af (λ).

Den ved Integrationen af VI anvendte Fremgangsmaade kan — som i § 6 af den foregaaende Afhandling bemærket — altid benyttes til at reducere en lineær Differentialligning, hvori Coefficienten til $\frac{d^{p'} y}{dx^{p'}}$ er en hel Function af x af Graden p' til en lineær Differentialligning af een Orden lavere, hvori Coefficienten til $\frac{d^{p'} z}{dx^{p'}}$ bliver af Graden $(p' + 1)$.

Anm. Ligesom ved Løsniugen af VI efter Liouvilles Methode saaledes er det selvfølgeligen ogsaa ved Løsningen af X efter den samme Methode i Almindelighed urigtigt at udelade den «Complementære Function». Det i «Mathematisk Tidsskrift» for 1864, Pag. 16 og 17 angivne «fuldstændige» Integral af Ligningen X er saaledes ikke i Almindelighed noget fuldstændigt Integral, hvilket let kan paavises; thi det vilde f. Ex. for Ligningen (λ) give det «fuldstændige» Integral

$$y = C_1 \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{x}}}{\delta x^{-\frac{1}{2}}} + C_2 \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}}}{\delta x^{-\frac{1}{2}}}$$

hvori δ betyder en Liouvillesk Differentiation; men det «particulære» Integral $y = C_2 \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}}}{\delta x^{-\frac{1}{2}}}$ kan bringes paa Formen af et bestemt Integral (s. Ramus, Pag. 318, Formel (282)) og bliver da

$$y = C\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\sqrt{x}}{\sin a}} \frac{da}{\sin^2 a},$$

som ikke er noget particulært Integral i (λ). Det andet «particulære» Integral $y = C_1 \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{x}}}{\partial x^{-\frac{1}{2}}}$ vil vanskeligt kunne beregnes efter Liouvilles Grundformel og er sandsynligvis ligesaa lidt noget particulært Integral. Derimod kunde man udvikle $e^{\pm 2\sqrt{x}}$ efter Potenser af x og udføre Differentiationen $\frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^{-\frac{1}{2}}}$ efter Kellands Grundformel (s. Forordet til 1ste Hovedafsnit). Denne Formel vil jo vistnok gjøre $\frac{\partial^{-\frac{1}{2}} e^{\pm 2\sqrt{x}}}{\partial x^{-\frac{1}{2}}}$ uendelig, og dette er een af Formlens Mangler; men det uendelige Resultat skyldes dog i dette Tilfælde den for alle Led fælles Factor $\gamma(-1)$, som derfor vil kunne inddrages i C_1 og C_2. Herved kommer man dog kun til det particulære Integral (λ)', idet det ved Indsættelse i (λ) vil vise sig, at C_2 maa være $= - C_1$. Selv ved Anvendelsen af Kellands Formel er altsaa hverken det ene, eller det andet af de «particulære» Integraler noget particulært Integral; men det ene er Complementær Function til det andet. Lignende feilagtige Anvendelser af Liouvilles Methode ere gjorte f. Ex. ved Integrationen af VI. c.

Art. 7. **Om Beskaffenheden af de Problemer, hvis Løsning kræver en Anvendelse af Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Differentiation med Hensyn til flere Variable.**

Jeg har i Forordet til 1ste Hovedafsnit begrundet, hvorfor jeg maa antage, at min Methode i Reglen vil vise sig meget simplere i Anvendelserne end Liouvilles, og man vil ved en

Sammenligning mellem Liouvilles og min Behandling af de foregaaende Exempler vistnok finde Rigtigheden af denne Antagelse bekræftet. Løsningen af alle de af Liouville behandlede Problemer synes mig ved min Methode at være erholdt ikke blot paa en simplere, men ogsaa paa en fuldstændigere Maade end ved Liouvilles.

Trods de store Forskjelligheder i Grundlag og Operationsmaade er der ikke destomindre en paafaldende Lighed mellem Liouvilles og min Methode med Hensyn til Naturen af de Problemer, ved hvilke der overhovedet kan være Tale om en Anvendelse af dem, og jeg vil derfor i de følgende Bemærkninger angaaende Beskaffenheden af de Problemer, som kræve en Anvendelse af Differentiation med hvilkesomhelst Indices, kunne for en stor Deel holde mig til, hvad Liouville i denne Henseende har anført.

Medens man maa anvende de sædvanlige Regningsarter, specielt Differentiation og Integration med positive hele Indices, naar man af givne Aarsager vil slutte sig til disses Virkninger, saa tyde de i Art. 2—5 indeholdte Exempler — og da navnligen Tiltrækningsproblemerne i Art. 4 og 5 — alle hen paa, at det omvendte Problem, nemligen det af givne Virkninger at udfinde Aarsagerne, i Almindelighed maa løses ved Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Ofte kan vel dette Problem foreligge under en saa simpel Form, at det kan løses ogsaa uden denne Regningsart; men denne bliver dog altid den rationelle og den simpleste Fremgangsmaade, som directe og indeholdende den fuldstændige Løsning fører til Maalet. Skal dette kunne naaes ad anden Vei, ved de sædvanlige Regningsarter, maa det i Reglen ske ved at gaae ud fra en supponeret Functionsform for Resultatet; men derved udelukkes ikke Muligheden af andre, eller mere fuldstændige Løsninger. Naar man f. Ex. uden at benytte sig af Differentiation med hvilkesomhelst Indices er, med Hensyn til Virkningen af en Magnetpol paa en elektrisk Strøm, kommen til det i Art. 4, Ex. 1 fundne Resultat $\varphi(x) = \frac{i}{2x^2}$, saa er det ved at gaae ud fra den Supposition, at $\varphi(x)$ maa være af Formen kx^n. Denne aprioriske Forudsætning har vist sig at være rigtig; men den kunde have været i hvert Fald ufuldstændig. Dette ses endnu bedre af Ex. 3 i Art. 4, naar man lader de to paralle rette Linier forestille elektriske Strømledere. Constanten k er da ifølge Forsøgene negativ, for hvilket Tilfælde vi have fundet $\varphi(r) = \frac{3i}{2(k+2)} \frac{1}{r^2} + K \frac{1}{r^{-k}}$, hvori K er arbitrær, saa at de givne Data ikke ere tilstrækkelige til en fuldstændig Bestemmelse af $\varphi(r)$. Ved at forudsætte, at $\varphi(r)$ maa have Formen ar^n, er man ad anden Vei kommen til $\varphi(r) = \frac{3i}{2(k+2)} \frac{1}{r^2}$, som ganske vist kan være rigtigt, idet K muligvis ogsaa for $k < 0$ bør være $= 0$, men som maaske ogsaa kun er et ufuldstændigt Resultat. Fuld Sikkerhed i denne Henseende kan kun opnaaes, naar der vides mere, end hvad vi i det nævnte Exempel ere gaaede ud fra som givet.

Ligesom man ved de directe mechaniske Problemer har de givne accelerende Kræfter udtrykte som Differentialcoefficienter af positiv hel (2den) Orden af Coordinaterne, betragtede som Functioner af Tiden, saaledes finder man ved de omvendte mechaniske Problemer de elementære Kræfter, som her ere de søgte Størrelser, næsten altid udtrykte som Functioner, afledede ved Differentiation med brudne Indices med Hensyn til de Variable, af hvilke disse Kræfter afhænge. Differentiation med hvilkesomhelst (brudne) Indices optræder altsaa her med en Slags Naturnødvendighed.

I Virkeligheden ere de elementære, eller moleculære Kræfter $\varphi(r)$ altid ubekjendte, og deres Virkninger kunne ikke directe iagttages. Det, der kan iagttages, er kun Virkningen af deres Resultant. Det er overalt denne, der danner den bekjendte Function, hvoraf den ubekjendte $\varphi(r)$ maa bestemmes, og dette kan i Almindelighed kun ske exact ved Anvendelsen af Differentiation med hvilkesomhelst Indices. Vilde man ved Iagttagelser directe tilnærmelsesvis maale de moleculære Kræfters Virkning, maatte man, naar Afstandene ikke ere meget betydelige, betjene sig af meget smaa Legemer; men Virkningen vilde da blive saa svag, at Iagttagelserne bleve upaalidelige. Man maa derfor i Reglen betjene sig af Legemer, af hvilke i det Mindste det ene har en forholdsvis betydelig Masse. Exemplerne i Art. 4 indeholde, omendskjøndt Masserne i Reglen i dem kun ere fremstillede ved een, eller to Dimensioner, i Virkeligheden Elementerne til Løsningen af de fleste Tiltrækningsproblemer, idet man enten vil kunne udvide Exemplerne til at omfatte 2 og 3 Dimensioner for Masserne — saaledes vilde Ex. 5 let kunne udvides til at omhandle Tiltrækningen af en Kugle i Stedet for af en Cirkel —, eller man vil kunne anstille Forsøgene saaledes, at de give de for Løsningen af Exemplernes simplere Problemer fornødne Data. Uden at gaae nærmere ind paa disse rent physiske Spørgsmaal skal jeg med Hensyn til dem indskrænke mig til at henvise til Liouvilles Afhandling «Questions de géométrie et de mécanique» i «Journal de l'école polytechnique», Tome XIII og specielt til Pag. 33—40. Iøvrigt ville sandsynligvis lignende, 2 og 3 Dimensioner af Rummet omfattende, Problemer ofte paa den simpleste og mest directe Maade kunne behandles ved den i Slutningen af denne Artikel omtalte Differentiation med Hensyn til flere Variable.

Foruden de nævnte Exempler i Art. 4 og 5 findes der i de andre Artikler Exempler, som vise en Anvendelse af Differentiation med hvilkesomhelst Indices i næsten alle Grene af den rene Mathematik. Ex. 3 i Art. 2 løser saaledes paa en meget simpel Maade et Problem i Mechaniken. Andre Exempler ere ere rent geometriske, og endeligen er i Art. 5 og 6 Methoden anvendt til Integration af visse totale lineære Differentialligninger saavel af hvilkensomhelst (brudden) Orden som af positiv hel Orden. I Forbindelse hermed kan anføres, at Methoden ofte vil kunne anvendes til paa en simpel Maade at bestemme de ved Integrationen af partielle Differentialligninger fremkomne arbitrære Functioner, naar disse indgaae i et Integral, som for en vis constant Værdi af en (eller flere) af de Variable erholder en Form, der kan henføres til et af de i Formlerne (A)—(G) forekommende Integraler, medens samtidigen Integralet skal være $=$ en given Function af den anden (eller de andre) uafhængig Variable. Mere sammensat, men desuagtet ifølge Art. 5 ofte løseligt, bliver Problemet, naar det, hvad der let kan hænde, giver Anledning til Integrationen af en Differentialligning af hvilkensomhelst (brudden) Orden.

I de i de foregaaende Artikler omhandlede Anvendelser af Methoden forekommer kun Differentiation med Hensyn til een Variabel. At der ogsaa i Anvendelserne vil kunne blive Brug for **Differentiation med Hensyn til flere Variable** x_1, x_2, x_3, . . ., er dog indlysende. Saaledes ville aabenbart de Problemer, som gaae ud paa Bestemmelsen af Functioner, indgaaende i bestemte Integraler, kunne antage en almindeligere og derfor hyppigere forekommende Form, naar Integralerne ere tagne med Hensyn til flere Variable, end naar de — som ved Formlerne ((6)) og ((7)) og de deraf afledede Formler (A)—(G) i Art. 4 — kun ere enkelte Integraler, tagne med Hensyn til een Variabel.

Under Fremstillingen i I af Methodens Grundprinciper har der ikke været nogen særlig Anledning til at gaae nærmere ind paa Differentiationen med Hensyn til flere Variable; thi den frembyder intet Særegent og udføres ved en ligefrem Anvendelse af Principerne for Differentiation med Hensyn til een Variabel. For Fuldstændigheds Skyld skal jeg dog slutteligen desangaaende tilføje et Par Bemærkninger, for hvis Rigtighed Beviserne ville ligge nær:

Ordenen for Differentiationen med Hensyn til de forskjellige Variable er ligegyldig, ɔ: $\frac{d^{m_1}}{dx_1^{m_1}} \frac{d^{m_2} y}{dx^{m_2}} = \frac{d^{m_2}}{dx^{m_2}} \frac{d^{m_1} y}{dx^{m_1}}$.

Man kan derfor for den «ufuldstændige» Differentiation med Hensyn til flere Variable bruge Betegnelsen: $\dfrac{d^{m_1+m_2+m_3+\dots}y}{dx^{m_1+m_2+m_3+\dots}}$.

Complementere $\psi_1(m_1, x_1)$, $\psi_2(m_2, x_2)$, $\psi_3(m_3, x_3)$, ... have Formen (B) i § 3; men de arbitrære Coefficienter i $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, der ere uafhængige af henholdsvis $x_1, x_2, x_3, \dots$, kunne derimod være arbitrære Functioner af de andre Variable, altsaa henholdsvis af $x_2, x_3, \dots$, af $x_1, x_3, \dots$, af $x_1, x_2, \dots$.

Formlen ((6)) antager for flere Variable Formen

$$\int_{a_1}^{(m_1)} dx_1^{m_1} \int_{a_2}^{(m_2)} dx^{m_2} \dots \int_{a_{i'}}^{(m_{i'})} f(x_1, x_2, \dots x_{i'})\, dx_{i'}^{m_{i'}} =$$

$$\frac{1}{\gamma(m_1)\cdot\gamma(m_2)\dots\gamma(m_{i'})}\int_{a_1}^{x_1} dt_1 \int_{a_2}^{x_2} dt_2 \dots \int_{a_{i'}}^{x_{i'}} (x_1 - t_1)^{m_1-1}(x_2 - t_2)^{m_2-1} \dots (x_{i'} - t_{i'})^{m_{i'}-1} f(t_1, t_2, \dots t_{i'})\, dt_{i'}$$

hvori $m_1, m_2, \dots m_{i'}$ ere > 0. Ligesom ((6)) vil denne Formel ikke give Led af Formerne $\psi_1(-m_1, x_1)$, $\psi_2(-m_2, x_2)$, ... $\psi_{i'}(-m_{i'}, x_{i'})$, naar $a_1, a_2, \dots a_{i'}$ ere $= 0$, og Potensexponenterne i Rækkeudviklingen for $f(x_1, x_2, \dots x_{i'})$ efter Potenser af $x_1, x_2, \dots x_{i'}$ alle ere > -1, saa at Formlen i dette Tilfælde vil give nøiagtigt samme Resultat som $\dfrac{d^{-m_1-m_2\dots-m_{i'}}f}{dx^{-m_1-m_2\dots-m_{i'}}}$, beregnet efter de andre Formler, f. Ex. efter (5).

Ved Transformationer, analoge med dem, der i Formlerne (A) — (G) af Art. 4 ere foretagne med det enkelte Integral $\int_a^x (x-t)^{m-1} f(t)\, dt$, kan der af det ovenstaaende Integral dannes mere almindelige Formler, som kunne faae en videre gaaende Anvendelse end hine Formler.

Formlen ((7)) kan selvfølgelig gives en lignende Udvidelse som ((6)).

Rettelse. I Stedet for den 10de til 14de Linie f. o. Pag. 14 læses:

«Betegnes nu ved $\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\}$ «den fuldstændige, ved Differentiation med Index m med Hensyn til x, af $f(x)$ afledede Function», og ved $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ «den ufuldstændige, ved Differentiation med Index m med Hensyn til x, af $f(x)$ afledede Function» haves»

Denne Rettelse, som foretages, fordi Benævnelsen «Differentialcoefficient» kunde være vildledende, har jeg, paa Grund af den vidt fremskredne Trykning, maattet anbringe paa dette Sted, hvorimod Benævnelsen «afledet Function» er brugt i det efterfølgende franske Résumé.